Math. P.
100. 4° bijv. 2

4° Math. P.
160 byy

Dofmann

Der

28. Satz des XI. Buchs

der

Elemente des Euclides.

Eine Einladungsschrift

zur

öffentlichen Erörterung

von

Sätzen

aus den

Lehrgegenständen der philosophischen Vorlesungen,

welcher

die innen benannten Herrn Zuhörer

der beyden Curse

auf dem Königlichen Lyceum

dahier

sich unterziehen werden.

von J. J. J. Hofmann

Aschaffenburg,
gedruckt in der priv. Königl. Baier. Buchdruckerey bey M. J. Wailandt.
1817.

Defension im zweyten Curse,

am 10ten September.

In diesem Curse defendiren in aufeinanderfolgenden Stellen:

Herr Wilhelm Datz, von Mainz,
— Carl Weber, von Walldürn,
— Franz Pelletier, von Aschaffenburg.
— Johann Baptist Dibelius, von Mainz.

Defension im ersten Curse,

am 11ten September.

Hier defendiren in der ersten Stelle, nach alphabetischer Ordnung:

Herr Balduin Kittel, von Aschaffenburg,
— Friedrich Richter, von Aschaffenburg,
— Johann Baptist Schipp, von Frankfurt.

In der zweyten Stelle defendiren, nach alphabetischer Ordnung:

Herr Franz Mahut, von Aschaffenburg,
— Jacob Tempel, von Aschaffenburg.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

Morgens von 9 — 12 Uhr im großen Saale des Lyceal-Gebäudes.

Vorwort.

Allgemein anerkannt ist die Vortrefflichkeit der Elemente des Euclides, jenes hochberühmten Geometers aus dem grauen Alterthume. Demungeachtet finden sich Sätze darin, welche näherer Bestimmung, Ergänzung oder Berichtigung bedürffen. Einer der wichtigsten davon ist der 28. Satz des XI. Buchs, ohne welchen die Körperlehre (Stereometrie) höchst mangelhaft wäre. Er betrifft die Gleichheit der beyden dreyeckigen Prismen, in welche jedes Parallelopipedon durch den Diagonalschnitt getheilt werden kann.

Euclides hat diesen Satz unbefriedigend dargestellt, und hierdurch den späteren Geometern Stoff zur Entdeckung und Verbesserung seines Fehlschlusses gegeben.

Zwey der vorzüglichsten ältern Commentatoren der Elemente, Christoph Clavius und Robert Simson, bemühten sich, diese Lücke auszufüllen. Allein sie erreichten (wie dies die nachfolgende Abhandlung zeigen wird) das vorgesteckte Ziel nicht.

Auch die meisten neueren Schriftsteller, Deutsche und Franzosen, haben den Lehrsatz entweder unbewiesen oder nur halbbewiesen vorgetragen, und so das Mangelhafte der Elemente nicht ergänzt. Selbst der, durch Herausgabe und Erläuterung der alten Geometer, so rühmlich bekannte Peyrard befriediget hier nicht vollkommen.

Die Beweise, welche sich bey Karsten und Legendre finden, entsprechen zwar der geometrischen Strenge, sind aber (wie es uns scheint) nicht elementar genug, um mit Leichtigkeit an die Stelle des 28. Satzes im XI. B. gesetzt werden zu können.

Diese Unvollständigkeit, welche in einem der wichtigsten Sätze der Elemente herrscht, durch eine neue Darstellung gründlich und faßlich zu berichtigen, ähnliche Bemühungen älterer und neuerer Schriftsteller zu prüfen, ist der Zweck nachfolgender Abhandlung, welche Sachverständigen eine angenehme Unterhaltung, Anfängern aber gründliche Belehrung gewähren soll.

Aschaffenburg im September 1817.

Ueber

den 28ten Satz des XI. Buchs

der

Elemente des Euclides.

1) Der 28te Satz des XI. Buchs der Elemente des Euclides ist ein Lehrsatz und lautet folgendergestalt:

Lehrsatz.

Wenn man ein Parallelopipedon durch eine Ebene nach nach den homologen Diagonalen zweyer gegenüberliegenden Seitenflächen schneidet, so wird es durch diese Ebene halbirt.

Das Parallelopipedon AB (Fig. 1.) werde von der Ebene CDEF durch die homologen Diagonalen der gegenüberliegenden Seitenflächen, nämlich durch die CF und DE, geschnitten, so behaupte ich, daß der Körper AB von der Ebene CDEF halbirt werde.

Beweis.

Da (I. B. 34. S.) das Dreyeck CGF dem Dreyecke CBF, das Drey-

eck ADE dem Dreyecke HDE gleich und ähnlich ist, aber (XI. B. 24. S.) das Parallelogramm CA dem Parallelogramme BE und das Parallelogramm GE dem Parallelogramme CH gleich und ähnlich ist, weil sie einander gegenüber liegen, so ist (XI. B. 10. Erkl.) das von den zwey Dreyecken CGF und DAE, und von den drey Parallelogrammen CE, CA und GE eingeschlossene Prisma dem von den zwey Dreyecken CBF und DHE, und von den drey Parallelogrammen CE, BE und BD eingeschlossenen Prisma gleich, denn sie werden von gleich vielen, gleichen und ähnlichen Ebenen eingeschlossen; folglich wird der ganze Körper AB von der Ebene CDEF halbirt, w. z. e. w.

2) Da jeder Lehrsatz aus zwey wesentlichen Stücken: der Behauptung und dem Beweise besteht, so muß auch vorstehendes Theorem nach diesen doppelten Erfordernissen critisch geprüft werden.

3) Die Behauptung jedes Lehrsatzes enthält die Hypothesis (das Gegebene, den Grund) und die Thesis (das Abgeleitete, die Folge). In obigem euclidischen Satze setzt die Hypothesis voraus:

a) ein gegebenes Parallelopipedon von willkührlicher Größe und Gestalt;

b) eine Ebene, welche durch die beyden ähnlich liegenden Diagonalen zweyer entgegenstehenden Seitenflächen einen Diagonalschnitt bildet.

Die Thesis ist sodann der Satz, daß dieser Diagonalschnitt das Parallelopipedon in zwey Hälften theile.

4) Was nun den erſten Theil der Hypotheſis, nämlich die Annahme eines willkührlichen Parallelopipedons betrifft, ſo iſt die Möglichkeit prismatiſcher Körper überhaupt in den früheren Sätzen des XI. Buchs der Elemente begründet, und dieſer Vorausſetzung ſteht nichts im Wege.

5) Aber der zweyte Theil dieſer Hypotheſe enthält die ſtillſchweigende Behauptung, daß jede zwey ähnlichliegende Diagonalen zweyer gegenüberſtehenden Seitenflächen eines Parallelopipedons in einerley Ebene liegen müßen. Da dieſe Behauptung nicht als Grundſatz angenommen werden darf, indem ſie dazu nicht einfach genug iſt, ſo muß ſie genügend erwieſen werden.

6) Die Nothwendigkeit dieſes Beweiſes hat ſchon einer der älteſten Commentatoren der Elemente, der ſcharfſinnige Clavius (*Euclidis* posteriores libri IX. Accessit liber XVI. de solidorum regularium cujuslibet intra quodlibet comparatione. Francofurti MDCVII. 8vo pag. 422) erkannt, und den Beweis ſelbſt in voller Schärfe beygefügt.

7) Dieſer Beweis iſt folgender. Da CA (Fig. 1.) ein Parallelogramm iſt, ſo muß CD mit GA gleichlaufend, auch CD = GA ſeyn. Weil aber auch FA ein Parallelogramm iſt, ſo muß auch FE mit GA gleichlaufend, und FE = GA ſeyn. Wenn aber jede der zwey Linien CD und FE mit der dritten GA gleichlaufend iſt, ſo muß auch die CD mit FE gleichlaufend (XI. B. 9. S.) und das Viereck CFED iſt ein Parallelogramm.

8) Man ſieht leicht ein, daß eben dieſer Beweis auch dann ſeine An-

wendung findet, wenn der Schnitt nach BG und HA, oder nach BE und CA, oder nach FH und GD, oder nach CH und GE, oder endlich nach BD und FA geschähe, da es bey dem Parallelopipedon CE nur diese sechs mögliche Diagonalschnitte geben kann.

9) Wird nun aber die Stärke des obigen euclidischen Beweises (1.) erwogen, so springt sogleich in die Augen, daß dieselbe auf der 10. Erklärung des XI. Buchs beruhe, welche folgende ist:

Erklärung. Gleiche und ähnliche Körper sind jene, welche von gleich vielen, gleichen und ähnlichen Ebenen eingeschlossen werden.

10) Prüft man diese Erklärung und ihre Anwendung zu dem fraglichen Beweise genauer, so läßt sich Zweyerley dagegen bemerken,

a) daß diese Erklärung einen Lehrsatz enthalte, welcher, da er nichts weniger als einfach ist, eines strengen Beweises bedarf;

b) daß aber selbst die Behauptung dieses Lehrsatzes nicht allgemein wahr sey.

11) Das Erste ist so einleuchtend, daß kein gründlicher Geometer den Ausspruch jener Erklärung als Grundsatz wird gelten lassen. Daher ist diese Erklärung des Euclides ein unerwiesener Lehrsatz, und dessen Elemente enthalten in dieser Hinsicht eine sehr fühlbare und bedeutende Lücke. Diese Lücke wird aber sogleich befriedigend ausgefüllt, wenn man die Behauptung des 28ten Satzes im XI. Buche auf andere Weise überzeugend darzuthun im Stande ist.

12) Dieses Unbefriedigende in der 10. Erklärung des XI. Buchs ist auch einem andern scharfsinnigen Herausgeber der Elemente, Robert Simson, nicht entgangen, welcher in der Vorrede (nach der deutschen Uebersetzung von Reder, herausgegeben von Niesert. Paderborn, 1806. S. VII.) sagt: „Dieser Satz (die 10. Erklärung) ist ein Lehrsatz, und nicht eine Erklärung, weil die Gleichheit von Figuren jeder Art bewiesen werden muß, und nicht angenommen werden darf; und deßhalb hätte er, obschon es ein wahrer Satz ist, dennoch bewiesen werden müssen.“ Dann fügt er noch bey: „*Quid autem dicendum, si haec propositio non vera sit? — Nonne confitendum est, Geometras per mille tercentos annos in hac re elementari deceptos fuisse? Et ex hoc quidem modestiam discere debemus, atque agnoscere quam parum nobis cavere possumus, quae est mentis humanae imbecillitas, ne in errores incidamus etiam in principiis scientiarum, quae inter maxime certas merito aestimantur.*“

13) Daß aber auch die Behauptung der 10. Erklärung, in dem Sinne des Euclides, nicht wahr sey, erhellet sogleich, wenn man irgend ein schiefes Parallelopipedon durch einen Diagonalschnitt in zwey dreyeckige Prismen zertheilet. Es sey nämlich AB (Fig. 2.) das gegebene Parallelopipedon, und CH der Diagonalschnitt, so entstehen die zwey dreyeckigen Prismen AECGHF und ECDBGH. Hierin ist nun Drey. AEC $\overline{\overline{\sim}}$ Drey. DCE, Dr. FHG $\overline{\overline{\sim}}$ Dr. BGH, ferner Parallelogramm AH $\overline{\overline{\sim}}$ Par. DG, Par. AG $\overline{\overline{\sim}}$ Par. DH und Par. EG ist beyden Prismen gemein. Nach der 10. Erklärung sollten also beyde Prismen gleiche und ähnliche

Körper seyn, d. h. sich decken. Daß diese Congruenz aber nicht Statt findet, ergiebt sich aus der scharfen Betrachtung der Prismen, indem die verschiedenen Neigungen ihrer viereckigen Seitenflächen gegen die dreyeckigen Grund- und Oberflächen dieses gänzliche Ineinanderfallen beyder Prismen verhindern. Wem dieses aus Betrachtung der Zeichnung nicht klar genug ist, wird sich am Bequemsten ein schiefes Parallelopipedon aus irgend einem Stoffe verfertigen, durch einen Diagonalschnitt in zwey dreyeckige Prismen zertheilen und sich nun leicht von der Unmöglichkeit ihres Deckens überzeugen.

14) Daher hat sich der sonst so scharfsinnige Clavius hier sehr geirrt, wenn er nach der 10. Erklärung Folgendes beyfüget:

„*Quod si plana similia, quibus corpora similia ex praecedenti definitione circumscribuntur, fuerint aequalia, singula singulis, dicentur ejusmodi figurae solidae non solum similes, verum etiam aequales. Nam si animo concipiantur sese penetrare mutuo hujusmodi solida, neutrum alterum excedet propter aequalitatem ac similitudinem planorem. Ex similitudine enim planorum infertur angulorum solidorum aequalitas, ut in praecedenti definitione docuimus; ex eorundem vero aequalitate, laterum proportionalium aequalitas, ut in lemmate propos. 22. lib. 6. demonstravimus. Quare solida illa omni ex parte sibi mutuo congruent: ac propterea inter sese existent aequalia.*“ a. a. O. S. 376.

15) Wenn das gegebene Parallelopipedon ein senkrechtes ist, so kann es allerdings durch einen Diagonalschnitt in zwey vollkommen con-

gruente dreyeckige Prismen getheilt werden. Es sey AH (Fig. 3.) dieser Körper, und ADHE die Diagonalebene, so wird man leicht finden, daß das dreyeckige Prisma ADBFHE dergestalt in DACGEH gestellt werden kann, daß das Dreyeck BDA das Dreyeck CAD decket; wodurch nun, wegen der Gleichheit der homologen Körperwinkel, wegen Congruenz der vierseitigen Grenzflächen und wegen gleicher Neigung derselben gegen die Dreyecke BDA und CAD, das erste dreyeckige Prisma das zweyte vollkommen decken wird, so daß also beyde nur ein einziges bilden.

16) Da das beym Clavius (a. a. O.) gezeichnete Parallelopipedon kein senkrechtes, sondern ein schiefes ist, so muß es um so auffallender seyn, daß sich dieser feine Geometer durch eine vermeintliche Congruenz der aus dem Diagonalschnitte entstehenden schiefen dreyeckigen Prismen hat täuschen lassen.

17) Ueberhaupt ist es seltsam, daß auch spätere Geometer vom ersten Range in ähnlichen Irrthum gerathen sind. Der sonst so gründliche Kästner stellt (in seinen bekannten Anfangsgründen der Arithm. Geom. u. s. w. Göttingen 1800, sechste Auflage S. 392) den Lehrsatz auf: Ein dreyeckiges Prisma ist halb so groß, als ein Parallelopipedon, welches mit ihm einerley Höhe und eine noch einmal so große Grundfläche hat. Um diese Behauptung zu erweisen, wird das gegebene dreyeckige Prisma zu einem Parallelopipedon ergänzt, und nun gezeigt, daß hierdurch noch ein zweytes dreyeckiges Prisma entstehe, welches das gegebene vollkommen decke. Da aber diese Congruenz nur dann erfolget, wenn das angegebene dreyeckige Prisma ein lothrechtes ist,

wodurch auch das entstandene Parallelopipedon ein senkrechtes wird, so ist Kästners Beweis mangelhaft, indem er etwas allgemein behauptet, was nur von einem besondern Falle erwiesen ist. Viele Schriftsteller haben Kästnern diesen Fehler nachgeschrieben, und er findet sich häufig in ihren geometrischen Compendien.

18) Da nun der Satz von der Gleichheit zweyer dreyeckigen Prismen von einerley Grundflächen und Höhen für die Berechnung ihres Körperinhaltes, auch für die Bestimmung der Gleichheit der Pyramiden und ihrer Berechnung, und überhaupt für die ganze Stereometrie so höchst wichtig ist, so wird es hier am rechten Orte seyn, andere Beweisarten dieser Behauptung kürzlich zusammenzustellen und critisch zu prüfen.

19) Nach Wolf (in s. Auszug aus den Anfangsgründen aller math. Wissenschaften, herausgegeben von J. T. Mayer und K. Chr. Langsdorf. Marburg, 1796. S. 203) sind alle prismatische Körper von einerley Grundflächen und Höhen deshalb gleich am Körperraume, weil sie durch Parallelschnitte mit ihren Grundflächen in dünne Scheibchen können zertheilt werden, welche einander gleich sind, und weil, wegen der gleichen Höhe, aus einem dieser Körper so viele solcher Scheibchen können erhalten werden, als aus dem andern. Alle prismatische Körper von einerley Grundfläche und Höhe bestänben daher aus gleichen Summen gleichgroßer Scheibchen und wären somit gleich am Körperraume.

20) Es bedarf keines großen Scharfsinnes, um das Unzulängliche dieses Beweises aufzudecken. Entweder werden diese Scheibchen als geo-

metrische Ebenen oder als höchst dünne Körperchen gedacht. Im ersten Falle kann aus der Summe noch so vieler Ebenen niemals ein Körper entstehen; im zweyten Falle aber bilden diese Scheibchen nichts anders, als kleine Prismen von gleicher Grundfläche und Höhe, deren Gleichheit eben so gut noch erwiesen werden muß, als die Gleichheit der gegebenen prismatischen Körper. Denn diese Scheibchen werden sich niemals vollkommen decken können, und ihre Gleichheit annehmen, heißt die Wahrheit des zu erweisenden Lehrsatzes selbst ohne Beweis annehmen.

21) Man kann auch die Unzulänglichkeit dieser Beweisart daraus erkennen, daß ihre Anwendung sogar auf offenbar falsche Sätze führt. Man denke sich z. B. über einem gegebenen Kreise einen senkrechten Cylinder und dann auch einen schiefen von derselbigen Höhe. Nimmt man nun beyde in gleichviele dünne Scheibchen getheilt an, so müßte auch die Summe der Umfangsflächen der in jedem Cylinder enthaltenen Scheibchen die Umfangsfläche jedes Cylinders erfüllen; somit müßten die Umfangsflächen beyder Cylinder gleich seyn, was offenbar der Fall nicht ist. Eben dieses tritt auch bey zwey Parallelopipeden ein, von denen das eine senkrecht, das andere ein schiefes ist, und mit jenem Grundfläche und Höhe gemein hat. Auch könnte man auf ähnliche Art beweisen, daß zwey Parallelogramme, welche gleiche Grundlinie und Höhe haben, und wovon das eine ein senkrechtes, das andere ein schiefes ist, gleiche Umfangslinien haben müßten, was abermals widersprechend ist.

22) Man denke sich zwey congruente Figuren in der nämlichen Ebene liegend, und mit dieser Ebene, in beliebiger Entfernung oberhalb der-

selben, eine Parallelebene. Von einem homologen Winkelpuncte jeder Figur ziehe man eine gerade Linie nach jener Parallelebene unter verschiedener Neigung, und lasse nun jede Figur an dieser Linie sich parallel hinaufbewegen, so, daß jede ihrer Seitenlinien bey dieser Bewegung in einerley Ebene bleibt. Hierdurch entstehen zwey prismatische Körper von gleicher Grundfläche und Höhe. Die Gleichheit ihrer Körperräume sucht man nun bisweilen dadurch zu erweisen, daß gleiche Ebenen, durch gleiche Höhen bewegt, auch gleiche Körper erzeugen müßten. Allein man erkennt sogleich das Unvollständige dieses Beweises, der durchaus ungeometrisch ist. Sobald aber die Gleichheit der erzeugten Prismen einmal streng erwiesen ist, so kann man den Hülfssatz obigen Beweises als Folgesatz daraus ableiten. Allein als Beweisgrund kann er nicht gelten.

23) Robert Simson fühlte sehr wohl das Unzureichende in dem Beweise des 28. S. im XI. B. der Elemente, und suchte denselben dadurch zu ergänzen, daß er nach dem 23. S. dieses Buchs folgende drey Lehrsätze einschiebt, welche hier eine Stelle finden und critisch geprüft werden müssen.

24) Erster Lehrsatz von Robert Simson. Wenn jeder von zwey körperlichen Winkeln durch drey, stückweise einander gleiche, ebene Winkel eingeschlossen ist, so haben die Ebenen, worin die gleichen Winkel liegen, die nämliche Neigung gegeneinander.

Beweis. Wenn (Fig. 4.) A und B die Körperwinkel sind, welche von den drey ebenen Winkeln CAD = FBG, CAE = FBH und EAD = HBG gebildet werden, so nehme man AK = BM, ziehe KL und KD lothrecht

auf AC, auch MN und MG lothrecht auf BF, und nun die geraden LD und NG. Da AK = BM und W. AKD = W. BMG = R und W. KAD = W. MBG ist, so muß auch KD = MG und AD = BG seyn. Da ferner AK = BM, W. AKL = W. BMN = R und W. KAL = MBN ist, so wird auch KL = MN und AL = BN seyn. Nun ist ferner, wegen AL = BN, AD = BG und W. LAD = W. NBG, auch LD = NG und die Dreyecke KLD und MNG sind congruent. Folglich ist W. LKD = W. NMG d. h. die Neigungswinkel der EbenenEAC und DAC, und der Ebenen HBF und GBF sind einander gleich.

Da ein ähnlicher Beweis auf jedes Paar von Neigungswinkeln der beyden andern Seitenflächen der Körperwinkel angewendet werden kann, so ist der Lehrsatz ohne Widerrede in seiner ganzen Allgemeinheit bewiesen.

25) Zweyter Lehrsatz von Robert Simson. Wenn jeder von zwey körperlichen Winkeln durch drey ebene Winkel, die stückweise einander gleich sind, eingeschlossen ist, und die gleichen Winkel die nämliche Lage haben, so decken die körperlichen Winkel einander.

Beweis. Es seyen wieder (Fig. 4.) die Körperwinkel A und B gegeben, worin W. CAD = W. FBG, W. CAE = W. FBH und W. EAD = W. HBG ist; auch haben die beyden letztgenannten Winkel gegen die Schenkel der Winkel CAD uud FBG diese Lage, daß an dem Schenkel CA der W. CAE = W. FBH, und an dem Schenkel FB der W. FBH = W. CAE liegt. Legt man nun den Punct B so in den Punct A, daß BF längs AC fällt, und daß der W. FBG den W. CAD decket, so muß auch die Ebene

FBH in die Ebene CAE fallen, weil jede mit jeder der zuerst genannten Ebenen gleiche Neigungswinkel bildet (Erster Lehrsatz). Da nun auch W. FBH = W. CAE, so fällt BH längs AE, und es ist einleuchtend, daß nun auch der Winkel HBG den W. EAD decket. Folglich decken sich auch die ganzen Körperwinkel B und A.

26) Dritter Lehrsatz von Robert Simson. Körper, welche von der nämlichen Zahl gleicher, ähnlicher und ähnlich liegender Figuren begränzt sind, und worin kein körperlicher Winkel von mehr als drey ebenen Winkeln eingeschlossen ist, sind einander gleich und ähnlich.

Beweis. Diesen führt Robert Simson an zwey senkrechten Parallelopipeden, welche von gleichen und ähnlichen und ähnlichliegenden Parallelogrammen eingeschlossen sind. In diesem Falle (bey lothrechten Körpern) ist es nun einleuchtend, daß beyde Parallelopipeden so ineinander können gestellt werden, daß sie sich vollkommen decken. Dieser Beweis ist bereits oben (15) gegeben worden.

27) Hierdurch glaubt nun Robert Simson die Lücke in den Elementen vollkommen ausgefüllt zu haben. Allein er begeht mit Clavius den nämlichen Fehlschluß, indem er von der Deckung, welche bey diesen lothrechten Prismen Statt findet, auf das Decken solcher schiefen Körper, folglich von dem besonderen Falle auf den allgemeinen schließet. Aus seinem Beweise folgte nämlich, daß die zwey schiefen Prismen, in welche ein schiefes Parallelopipedon dnrch den Diagonalschnitt getheilt werden kann, sich auch decken müßten. Die Unmöglichkeit dieser

Congruenz ist aber bereits oben (13) dargelegt worden. Hieraus ersieht man, daß auch Robert Simson's Bemühungen nicht dazu dienen, um den Beweis des 28. Satzes im XI. B. der Elemente gehörig zu ergänzen.

28) Hier ist nun der schicklichste Ort, sich eine recht klare Einsicht in den Grund der Fehlschlüsse von Clavius und Robert Simson zu verschaffen. Sie sind nicht aus Mangel der Verstandeskraft, sondern lediglich aus mangelhafter Bildung des Anschauungsvermögens entstanden. Hätten jene Geometer die beyden schiefen Prismen, welche aus dem Diagonalschnitte eines schiefen Parallelopipedons entstehen, mit schärferem Blicke angeschaut, so müßten sie sogleich ihren Irrthum erkannt und das Mangelhafte jener Behauptung eingesehen haben. Nichts kann die Nothwendigkeit einer geometrischen Anschauungslehre eindringender erweisen, als eben diese Fehlschlüsse zweyer hochberühmten Geometer. Wenn nun solche Männer aus beschränkter geometrischen Anschauungskraft fehlen konnten, wie sehr ist nicht den Anfängern das ernste Ueben der geometrischen Anschauungslehre Bedürfniß? *)

29) Es sey AH (Fig. 5) das gegebene Parallelopipedon, und CF der Diagonalschnitt, so entstehen die beyden schiefen dreyseitigen Prismen ABCEFG

*) Ich benütze diese Stelle, um den Freunden der Geometrie anzuzeigen, daß die zweyte (verbesserte und vermehrte) Auflage meiner geometrischen Anschauungslehre, Mainz, bey Kupferberg, so eben erschienen ist, und auch bald in demselben Verlage eine stereometrische Anschauungs- und Wissenschafts-Lehre erscheinen wird.

und CDBGHF. Wir wollen jenes das hintere, dieses das vordere (in Bezug auf die Ansicht unserer Zeichnung) nennen. Wird nun das vordere Prisma von dem Parallelopipedon getrennt, dasselbe umgekehrt, d. h. seine Oberfläche zur Grundfläche und seine Grundfläche zur Oberfläche gemacht, so, daß nun CBD, in der verlängerten Linie FE und in der erweiterten Ebene EFG, die Lage von cbd erhält, so stellt gfhdbc die Lage dieses umgekehrten dreyeckigen Prisma's vor.

30) Vergleicht man nun die Prismen ABCGFE und ghfdbc miteinander, so ergeben sich folgende Resultate:

a) Dr. ACB $\overline{\underline{\sim}}$ Dr. EGF $\overline{\underline{\sim}}$ Dr. gfh $\overline{\underline{\sim}}$ Dr. cbd. Ferner ist BCGF $\overline{\underline{\sim}}$ bcgf, ACGE $\overline{\underline{\sim}}$ hfbd und ABFE $\overline{\underline{\sim}}$ ghdc. Dieses heißt: beyde Prismen sind von gleich vielen, gleich und ähnlichen Seitenflächen eingeschlossen.

b) Da die Neigung der Seitenebenen ABFE und CBFG der Neigung der Ebenen DCGH und BCGF gleich ist, so muß auch die Neigung jener beyden Ebenen der Neigung der Ebenen hgcd und fgcb gleich seyn. Auf ähnliche Weise ist der Neigungswinkel der Ebenen BAEF und CAEG jenem der Ebenen ghdc und fhdb, und der Neigungswinkel der Ebenen BCGF und ACGE jenem der Ebenen gfbc und hfbd gleich.

c) Ferner ist leicht zu erkennen, daß jede der Seitenflächen ABFE, CBFG und CAEG mit der Oberfläche ABC und mit der Grundfläche EFG die nämlichen Winkel bildet, welche jede der Seitenflächen hgcd, fgcb und fhdb mit der Oberfläche hgf und mit der Grundfläche dcb erzeuget.

d) Auch wird jeder der sechs Körperwinkel, welche das eine dreyeckige Prisma enthält, mit dem homologen des andern Prisma's aus gleichvielen und gleich großen ebenen Winkeln gebildet. Der Körperwinkel bey C wird z. B. wie jener bey f aus drey ebenen Winkeln ACB = hfg, BCG = gfb und ACG = hfb gebildet. Eben dieses gilt von jedem andern Paare dieser homologen Winkel.

31) Ungeachtet nun beyde Prismen in Congruenz ihrer Seitenflächen, in der Neigung derselben sowohl unter sich, als gegen Grund- und Oberflächen, und endlich auch in der Größe und Zahl der ihre Körperwinkel bildenden ebenen Winkeln übereinstimmen, so decken sie sich dennoch nicht. Worin liegt der Grund dieser Abweichung bey sovielfacher Uebereinstimmung? Diese Frage kann einzig und allein durch die Anschauung beantwortet werden. Denn wenn man die Dreyecke ACB und hfg betrachtet, so sieht man sogleich, daß die Seiten AB und hg in Rücksicht ihrer Lage übereinstimmen, die Linien AC und hf, so wie BC und gf aber eine verschiedene Lage haben. Man kann sie in Bezug auf gB die symmetrische nennen, und man sieht, daß auch die ganzen Dreyecke ACB uud hfg eine symmetrische Lage haben. Auf gleiche Weise sind EGF und dbc symmetrisch liegende Dreyecke und die Kanten AE und hd, CG und fb, BF und gc symmetrische Linien. Betrachtet man das ganze Prisma ACBFGE und gfhdbc, so haben endlich beyde Körper, in Bezug auf ihre Oberflächen, oder in Bezug auf ihre Grundflächen, eine symmetrische Lage, und können daher füglich symmetrische Körper genannt werden.

32) Eine besondere Aufmerksamkeit verdienen aber die homologen

Körperwinkel. Betrachtet man z. B. diese Winkel bey C und bey f, so ist zwar jeder von drey ebenen Winkeln umschlossen, welche paarweise gleich sind; allein wenn der Winkel ACB den Winkel gfh so decket, daß C in f, CA längs fg und CB längs fh fällt, so decket der Winkel ACG den Winkel gfb so wenig, als der Winkel BCG den Winkel hfb, weil die Seitenflächen, worin diese Winkel liegen, gegen die Dreyecke ACB und gfh eine verschiedene (man kann sagen eine symmetrische) Lage haben. Daher kann denn der Körperwinkel bey C den Körperwinkel bey f nicht decken. Aus gleichem Grunde wird keiner der übrigen Körperwinkel bey A, B, F, G und E mit dem ihm homologen Körperwinkel bey h, g, c, b und d so zusammenfallen, daß sie sich deckten. Diese Eigenthümlichkeit der Körperwinkel beyder Prismen hat sowohl Clavius als Robert Simson übersehen. Denn sonst hätten Beyde das gänzliche Ineinanderfallen dieser Winkel, und mit diesem auch die Congruenz der Körper selbst, nicht behaupten können; da dieser Behauptung die Klarheit der Anschauung geradezu widerspricht. Wie äusserst wichtig zeigt sich hierdurch die scharfe Bildung der Anschauungskraft für das Studium der Geometrie?

33) Hieraus entspringt nun der Begriff von den symmetrischen Körpern, der, soviel wir wissen, zuerst von den französischen Geometern in die Geometrie eingeführt worden ist. Legendre sagt (in seinen Elémens de Géometrie, avec des notes. 4me édition. A Paris, 1802. S. 163): Symmetrische Körper werde ich jene nennen, welche auf beyden Seiten einer gemeinschaftlichen Grundfläche dergestalt construirt sind, daß die Verbindungslinien zwischen den Scheiteln ähnlich liegender

Körperwinkel auf dieser Grundfläche (oder ihrer Verlängerung) lothrecht stehen.

Zur Erläuterung dieser Erklärung sey abc (Fig. 6.) ein beliebiges Dreyeck und d ein ausserhalb dessen Ebene angenommener Punct. Von d giebt es ein Loth auf die Ebene abc, welches entweder in dieselbe, oder ausserhalb derselben, in ihre Verlängerung, trifft. Hier sey das Letzte und df dieses Loth. Macht man nun fg = df und zieht die geraden Linien ad, bd, cd, ferner ag, bg, cg, so entstehen zwey dreyseitige Pyramiden abcd und abcg, welche eine symmetrische Lage haben und deßhalb symmetrische Pyramiden heissen. — Auf gleiche Art lassen sich symmetrische dreyeckige Prismen, symmetrische Parallelopipeden u. s. f. construiren.

34) Man wird bald finden, daß die, auf diese Weise (33) entstandenen, symmetrischen Körper in gleich viele, congruente Seitenflächen eingeschlossen sind, daß jedes Paar homologer Seitenflächen gleiche Neigung hat, und daß alle homologe Körperwinkel von gleich vielen und gleich großen ebenen Winkeln eingeschlossen sind. Dieses hier weitläufig auseinander zu setzen, verbietet die Kürze des Raumes. Aber selbst der Anfänger wird, durch Hülfe der oben erwiesenen Sätze, die Beweise leicht selbst finden können. Es stimmt daher die Erklärung der symmetrischen Körper nach Legendre mit der unserigen (31) überein.

35) Was nun die Entstehung symmetrischer Prismen betrifft, so kann man dieselbe auf folgende leichtverständliche Art nachweisen. Man nehme in einer gegebenen Ebene die gerade Linie gB (Fig. 5) und in ihr gh = AB,

und beschreibe die congruenten Dreyecke gfh und ACB so, daß gf = BC, hf = AC werde. Auf gfh und BCA errichte man nun die hd = AE unter gleichen schiefen Neigungswinkeln, und lasse diese Dreyecke in paralleler Richtung sich dergestalt an hd und AE herabbewegen, daß hf immer in der Ebene hfbd, AC aber in der Ebene ACGE bleibt, so entstehen die beyden symmetrischen dreyeckigen Prismen gfhdbc und BCAEGF. Setzt man sie gehörig zusammen, so bilden sie das Parallelopipedon AH.

36) Nachdem nun Legendre (a. a. O.) gezeigt hat, daß die symmetrischen Körper in der Congruenz ihrer Seitenflächen, in ihrer Neigung gegeneinander und in der Gleichheit der ihre Körperwinkel bildenden ebenen Winkel übereinstimmen, fügt er hinzu: „*On peut conclure, que deux polyèdres symmétriques sont égaux quoiqu'ils ne puissent être superposés: Car il n'y a d'autre différence dans les deux solides, que celle de la position des parties, laquelle n'est point essentielle à la grandeur de ces mêmes parties.*“

So wahr nun diese Aeusserungen sind, so wenig können sie die Gleichheit der symmetrischen Körper geometrisch begründen. Dieses fühlte auch der scharfsinnige Legendre. Denn er hat in den Notes sur les Elémens de Géometrie; note VII. Seite 303. u. f. einen strengen Beweis über die Gleichheit der symmetrischen Körper gegeben.

37) Da sich dieser Beweis von Legendre durch Originalität und Gründlichkeit auszeichnet, und die Elemens de Géometrie in Deutschland nicht sehr allgemein bekannt sind, so theilen wir ihn hier, wenigstens der Ideenfolge nach, mit. Der aufmerksame Leser wird die ausführlichen Be-

weise wohl selbst auffinden, und sich die passenden Zeichnungen dazu leicht verfertigen können.

I. Satz Wenn man aus der Spitze eines gleichschenklichen Dreyecks, auf dessen Ebene, ein Loth errichtet nnd solches zu beyden Seiten der Ebene gleich groß nimmt, auch von jedem Endpuncte der Grundlinie des gleichschenklichen Dreyecks eine gerade Linie nach jedem Endpuncte dieser beyden Lothe zieht, so entstehen zwey symmetrische Pyramiden, welche sich decken.

II. Satz. Wenn man aus dem Mittelpuncte des um ein gegebenes Dreyeck zu beschreibenden Kreises auf des Dreyecks Ebene ein Loth errichtet, dasselbe nach beyden Seiten des Dreyecks gleich groß macht, und jeden Endpunct dieser zwey Lothe mit jedem der drey Winkelpuncte des Dreyecks verbindet, so entstehen zwey symmetrische Pyramiden von gleicher Größe.

Denn jede dieser Pyramiden zerfällt in drey andere von gleichschenklichen Grundflächen (wie die im I. Satze), welche paarweise congruent sind. Folglich sind auch ihre Summen gleich.

III. Satz. Um jede dreyseitige Pyramide kann eine Kugel beschrieben werden, deren Fläche durch die Scheitelpuncte ihrer vier Körperwinkel geht.

Wenn man um eine der dreyeckigen Seitenflächen der gegebenen Pyramide einen Kreis beschreibt, aus dessen Mittelpuncte auf denselben ein Loth errichtet, so ist jeder Punct dieses Lothes von jedem Winkelpuncte des Dreyecks gleichweit entfernt, und es kömmt nur darauf an, diesen Punct so zu wählen, daß auch seine Entfernung von der Spitze der Pyra-

mide eben diese Größe erhält, was man leicht durch Construction finden kann.

IV. Satz Zwey symmetrische dreyseitige Pyramiden sind gleich am Körperinhalte.

Wenn man um jede derselben eine Kugel beschreibt, so sind ihre Halbmesser von gleicher Größe. Fallen nun die Mittelpuncte dieser Kugeln in die Pyramiden, so fälle man aus ihnen auf jede ihrer Seitenflächen ein Loth, und ziehe nach jeder Winkelspitze der Pyramiden eine gerade Linie, so entstehen in jeder Pyramide vier kleinere, welche (nach II. Satz) paarweise gleich sind. Folglich sind auch ihre Summen d. h. die symmetrischen Pyramiden gleich.

V. Satz. Zwey symmetrische Prismen sind gleich am Körperraume.

Denn man sieht leicht, daß sich jede zwey symmetrische Prismen in eine gleiche Anzahl von symmetrischen dreyeckigen Pyramiden zertheilen lassen. Da nun diese paarweise einander gleich sind (nach IV. Satz), so sind es auch die gegebenen symmetrischen prismatischen Körper.

Anmerkung. Wenn im II. Satze der Mittelpunct des um das Dreyeck zu beschreibenden Kreises ausserhalb dieses Dreyecks; oder in dem IV. Satze der Mittelpunct der um die Pyramiden zu beschreibenden Kugeln ausserhalb der Pyramiden fällt, so ist es leicht, die Beweise auf ähnliche Art zu führen.

38) So befriedigend nun auch dieser Beweis ist, so muß man doch gestehen, daß er (besonders bey näherer Ausführung) auf elementar-

sche Kürze keinen Anspruch machen kann. Es schien mir daher der Mühe werth, einen so höchst wichtigen Satz der Stereometrie: das Theorem von dem Diagonalschnitte des schiefen Parallelopipedons, so kurz und bündig zu erweisen, als dieses nur immer von einer ähnlichen Behauptung der Körperlehre gefodert werden kann. Den hierüber ersonnenen Beweis habe ich bereits vor dreyzehn Jahren der vormaligen Departementalgesellschaft der W. W. und K. K. in Mainz (welche mich mit einem Diplome zum Beytritt als auswärtiges Mitglied beehrt hatte), als kleine Denkschrift zugesendet, und die mathematische Section jener Gesellschaft hat meine Darstellung als sehr befriedigend erkannt. Ich lege sie hier öffentlich mit der Bemerkung vor, daß sie sehr füglich an die Stelle des 28. Satzes im XI. Buche der Elemente des Euclides gesetzt werden, und so die Lücke ergänzen kann, welche in dem Beweise dieses wichtigen Lehrsatzes herrscht.

39) Es sey (Fig. 7.) abcdefgh das gegebene schiefe Parallelopipedon und adhe dessen Diagonalebene, so ist zu beweisen, daß das Prisma acdheg gleich sey dem Prisma abdhfe.

Man halbire cg in l, errichte lm in der Ebene ch und li in der Ebene ee lothrecht auf cl und ziehe im, so sind cg, ae und dh auf der Dreyecksebene ilm senkrecht (El. XI, 4 u. 8). Wird nun das schiefe Parallelopipedon ah durch das über im verlängerte Dreyeck lim durchschnitten, so entspringt das Rechteck likm, worauf die vier Seitenflächen dieses Parallelopipedons lothrecht stehen. (El. XI, 8.)

Nun verlängere man die cg, ae, bf und dh über g, e, f und h, so,

daß gp = cl, en = ai, fo = bk und hq = dm ist, und ziehe die Verbindungslinien pn, no, oq und qp, so wird noqp ein Rechteck, welches dem Rechtecke ikml congruent ist (El. XI, 10, 4 u. 5). Auch sieht man leicht, daß nun ein senkrechtes Parallelopipedon iq entstanden ist, welches durch den Diagonalschnitt imqn in zwey congruente dreyeckige Prismen limqnp und ikmqon getheilt werden kann, und daß der Körper cadmil dem Körper gehqnp, und der Körper adbkmi dem Körper ehfoqn vollkommen congruent ist.

Hieraus entstehen nun folgende Schlüsse:

Körper acm ≅ Körper egq,
Körper ilh = Körper ilh,

Körper (acm + ilh) = Körper (egq + ilh) d. h.
Prisma ach = Prisma ilq Nro. I.

Deßgleichen ist auch:

Körper bdi ≅ Körper fhn,
Körper kme = Körper kme,

Körper (bdi + kme) = Körper (fhn + kme) d. h.
Prisma bde = Prisma kmn Nro. II.

Da nun, nach dem Erwiesenen, Prisma ilq ≅ Prisma kmn, so ist auch (nach Nro. I. u. II.) Prisma ach = Prisma bde.

Wenn die auf den Seitenflächen des gegebenen schiefen Parallelopipedons lothrecht stehende Durchschnitts-Ebene likm mit mk in hf oder in die Grundfläche eghf eintreffen sollte, so darf man nur das gegebene Parallelopipedon oberhalb acdb und unterhalb eghf um die Größe der

Seite ge ein- oder mehrmal verlängern, wo denn der nämliche Beweis geführt werden kann.

40) In Frankreich haben die Elemente des Euclides an Herrn Peyrard (Bibliothecar der polytechnischen Schule zu Paris) einen sehr thätigen Uebersetzer nnd geschickten Herausgeber gefunden. Seine Schrift führt den Titel: Les Elémens de Géométrie d'Euclide traduits littérale. ment, et suivis d'un Traité du Cercle, du Cylindre, du Cône et de la Sphère; de la mesure des Surfaces et des Solides; avec des Notes. Par F. Peyrard. A Paris 1804. XV. und 576 S. 8. mit 8 Kupfertafeln. Sie enthält eine wohlgerathene wörtliche Uebersetzung der sechs ersten Bücher, nebst dem eilften und zwölften der Elemente. In dem Supplemente (S. 447 — 558) hat Peyrard die von Euclides nicht aufgenommenen Sätze vom Kreise, Cylinder, Kegel, von der Kugel, vom Ausmessen der Oberflächen und der Körper, nach den Grundsätzen des Archimedes, aber nach Euclides Methode abgehandelt. Die Noten endlich (S. 559 — 575) enthalten Erklärungen über einige dunkle Stellen der Elemente, und vorzüglich eine Critik gegen Robert Simson in Bezug auf die X. Erklärung des XI. Buchs.

41) Diese Critik betrifft fürs Erste eine Behauptung von Robert Simson: die X. Erklärung des XI. Buchs der Elemente sey nicht allgemein wahr, indem es in der That Körper gäbe, welche, obgleich von gleich vielen, gleich und ähnlichen Seitenflächen umschlossen, dennoch weder congruent, noch blos gleich an Körperraume seyen. Diese Behauptung beweiset Robert Simson durch zwey Körper, welche entstehen,

wenn man in der Grundfläche einer dreyseitigen Pyramide einen willkührlichen Punct annimmt, durch ihn ein beliebiges Loth in dem Innern der Pyramide darauf errichtet, dasselbe eben so weit zur andern Seite der Grundfläche verlängert, und nun von jedem Endpuncte dieser Lothe drey gerade Linien nach den drey Winkelpuncten der Grundfläche ziehet. Man sieht leicht, daß die sich hierdurch bildenden zwey Körper, von welchen der eine vier auswärtsgehende, der andere aber drey auswärts- und einen einwärtsgehenden Körperwinkel hat, von gleich vielen, gleich und ähnlichen Seitenflächen eingeschlossen werden, ohne daß solche weder an Größe, noch an Gestalt übereinstimmen. Da nun dieses unwidersprechlich wahr ist, so müßen wir Robert Simson's Aeusserung als vollkommeu begründet ansehen, und die X. Erklärung des XI. Buchs ist somit nicht bestimmt genug ausgedrückt. Herr Peyrard sagt zwar: „Ist es nicht einleuchtend, daß Euclides nur von solchen Körpern sprach, welche keine einwärts gehende Winkel haben?" Allein hier ist nicht die Rede von dem Sinne, welchen Euclides mit seinen Worten verbunden haben mag, sondern von dem Sinne, welchen man mit klar ausgesprochnen Worten verbinden muß. Und darin hat Robert Simson offenbar Recht. Was sonst noch gegen diese X. Erklärung zu bemerken ist, wurde bereits oben (10 u. f.) auseinandergesetzt.

41) Für's Zweyte entgeht Hrn. Peyrard das Unzulängliche in dem Beweise von Robert Simson nicht, worauf wir bereits früher (27) aufmerksam gemacht haben. Er bemerkt mit Recht, daß der XVIII. und XL. Satz des XI. Buchs, so wie auch der III. und IV. Satz des XII.

Buchs der Elemente nicht befriedigend dargethan sey, so lange die Behauptung nicht scharf erwiesen wäre.

42) Aber wie verhält sich Peyrard in dieser schwierigen Sache? Er stellt drey Lehrsätze auf, welche mit den oben (24, 25, 26) von Robert Simson ausgesprochenen im Wesentlichen einerley sind. Bey dem zweyten Lehrsatze (oben 25) bemerkt Er auch richtig, daß sich die fraglichen Körperwinkel nicht immer deckten, sondern bisweilen als symmetrische (31 u. f.) erschienen. Aber nun heißt es: „Hieraus schließe ich, daß die Congruenz zweyer Körperwinkel, welche von drey ebenen, einzeln genommen, gleichen Winkeln eingeschlossen sind, nicht Statt finde, wenn, nachdem man zwey gleiche ebene Winkel derselben ineinander gelegt hat, ihre beyden andern Winkel nicht nach den nämlichen Seiten hin liegen. In diesem Falle muß man sich also begnügen, zu sagen, daß zwey Körperwinkel, deren jeder von drey ebenen Winkeln, welche paarweise einander gleich sind, gebildet wird, auch unter sich gleich sind, weil ihre bestimmende Stücke, d. h. ihre ebene Winkel und ihre Neigungen gleiche Größe haben."

43) Hr. Peyrard hat hierdurch wohl Robert Simsons Behauptung, daß sich die fraglichen Körperwinkel deckten, berichtiget; allein, daß er jene Körperwinkel gleiche nennt, welche nicht als congruent erscheinen, ist gegen die Natur der Sache, und selbst gegen den Sprachgebrauch, da solche Körperwinkel sehr wohl symmetrische heissen. Man soll nie von allgemein anerkannten Begriffsbestimmungen abweichen. Alle Geometer verstehen aber unter Gleichheit die Uebereinstimmung in

der Größe; unter Aehnlichkeit Uebereinstimmung in der Gestalt, und unter Congruenz die Uebereinstimmung in Größe und Gestalt zugleich. Nach diesem sieht man sogleich, daß die fraglichen Körperwinkel weder gleiche, noch ähnliche, noch congruente genennt werden dürffen. Sie sind nämlich zum Theil gleich, zum Theil ähnlich, und folglich nicht vollkommen übereinstimmend. Die Benennung: symmetrische Körperwinkel ist wohl die schicklichste. Wie durfte sie also Peyrard gleich nennen, da er sich selbst des Ausdrucks: symmmetrische Körper bedienet?

44) Der dritte Lehrsatz des Hrn. Peyrard ist wörtlich das Theorem von Robert Simson (oben 26). Er behauptet also mit diesem, daß die zwey dreyeckigen Prismen, welche aus dem Diagonalschnitte des schiefen Parallelopipedons entstehen, gleich und ähnlich seyen, obschon sie nicht als congruent erscheinen. Hier, sagt er, muß man sich wieder begnügen, zu sagen, daß diese Körper deshalb gleich und ähnlich seyen, weil ihre bestimmende Stücke gegenseitig vollkommen gleich sind.

45) Zur Prüfung dieser Ansicht müßen wir unsere vorigen Aeusserungen (43) wiederholen. Es ist für's Erste gegen den scharfen Sprachgebrauch, zwey Körper gleich und ähnlich zu nennen, welche doch nicht congruent sind, und wofür Hr. Peyrard selbst den Ausdruck: symmetrische Körper gebraucht. Aber für's Zweyte kann noch weniger aus einer solchen Gleichheit und Aehnlichkeit die Uebereinstimmung in der Größe beyder Körper abgeleitet werden. Diese ist vielmehr gar nicht scharf

bewiesen. Da Peyrard selbst (a. a. O. S. 564) auf die, der Geometrie von Legendre beygefügten Noten verweiset (33 u. f.), so ist es um so auffallender, wie ein so strenger Geometer sich hier diesen Mangel an Schärfe erlauben konnte. Er hätte zum wenigsten die Beweise von Legendre (37) seinem Vortrage einverleiben sollen.

46) Da der Satz von der Gleichheit der zwey dreyeckigen Prismen, welche durch den Diagonalschnitt eines schiefen Parallelopipedons entstehen, in den meisten Compendien der Elementargeometrie nur höchst unbefriedigend erwiesen wird, so ist es zweckmäßig, hier noch den strengen Beweis eines älẗen, jedem deutschen Geometer rühmlichst bekannten Schriftstellers, des gründlichen Karsten, beyzubringen. Man mögte sich wundern, daß diese sinnreich ausgedachte Demonstration nicht häufiger in späteren Schriften aufgenommen worden ist; allein wahrscheinlich hat man sie nicht für elementar genug gehalten, um solche den ersten Anfängern mitzutheilen. In der That scheint sie auch der unserigen (39) in dieser Hinsicht nachzustehen.

47) Um diesen Beweis von Karsten (Lehrbegriff der Mathematik, Geometrie, §. 343) kennen zu lernen, theilen wir ihn hier in einer faßlicheren Form mit.

Wenn AS (Fig. 8) das gegebene schiefe Parallelopipedon, GCMQ aber der Diagonalschnitt ist, und man legt durch die Mitte E und O der Grundflächen AI und KS die Ebene HBLR parallel mit GAKQ, und die Ebene FDNP parallel mit ACMK, so entstehen vier Parallelopipeden: AO, FR, BN und ES, welche unter sich congruent sind, und deren jedes $\frac{1}{4}$ des

gegebenen ist. Zwey von diesen Parallelopipeden theilet der Diagonalschnitt GCMQ nicht, zwey andere aber werden durch ihn in zwey dreyeckige Prismen getheilt. Jene sollen die äusseren, diese die mittleren Parallelopipeden, die aus letzten entstehenden dreyeckigen Prismen aber die mittleren Prismen heissen.

Wird nun jedes der mittleren Parallelopipeden, wie das gegebene, in vier kleine Parallelopipeden getheilt, so entstehen in jedem wieder vier congruente Parallelopipeden, zwey mittlere und zwey äussere, deren jedes $\frac{1}{16}$ des gegebenen ist. Jedes dieser mittleren könnte nun wieder so getheilt werden, und man würde in jedem vier congruente Parallelopipeden erhalten, deren jedes $\frac{1}{64}$ des gegebenen wäre. Diese Theilung aber kann, wie man leicht sieht, ins Unendliche fortgesetzt werden.

Da nun bey jeder Theilung die Summe der äusseren Parallelopipeden die Hälfte des gegebenen beträgt, und somit von letzterem die Hälfte, von dieser Hälfte wiederum die Hälfte u. s. f. ohne Ende hinweggenommen werden kann, so muß der Unterschied zwischen der Summe aller äusseren Parallelopipeden und dem gegebenen einmal kleiner als jede angebliche Größe werden (Elem. X. B. 1. S.). Allein der Unterschied der größeren Prismen GCS und GCK kann nur in dem Unterschiede aller mittleren Prismen liegen. Da nun diese mittlere Prismen selbst kleiner, als jede angebliche Größe werden können, so muß sich auch ihr Unterschied in dem Maaße verkleinern. Daher sind die größeren Prismen GCS und GCK um einen Unterschied verschieden, der kleiner als jede angebliche Größe ist, d. h. diese Prismen sind gleich.

48) Bey dem scharfen Durchforschen dieses Beweises haben wir folgende eigenthümliche Demonstration erdacht, welche sich (wie es uns scheinet) durch Kürze, Strenge und Faßlichkeit empfehlen dürfte.

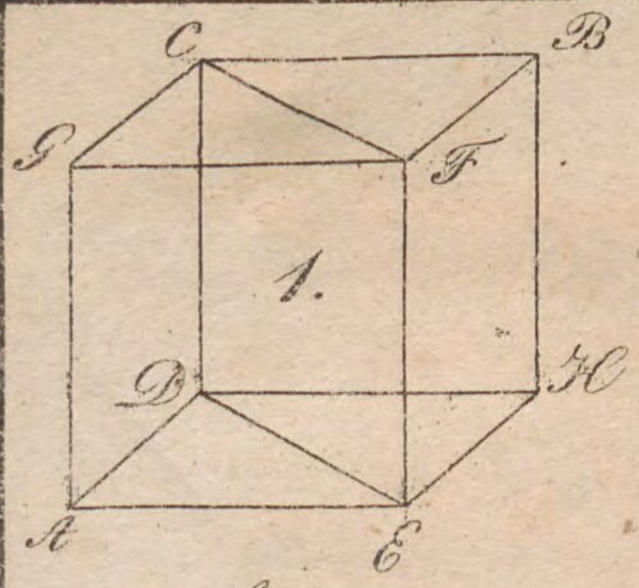
I. Das dreyeckige Prisma GCS (Fig. 8) besteht aus einem äussern Parallelopipedon ES, welches $\frac{1}{4}$ des gegebenen AS ist, aus zwey äussern Parallelopipeden, welche zusammen $\frac{2}{16}$ oder $\frac{1}{8}$ von AS, aus vier äusseren, welche zusammen $\frac{4}{64}$ oder $\frac{1}{16}$ von AS, aus acht äusseren, welche zusammen $\frac{8}{256}$ oder $\frac{1}{32}$ von AS betragen. Die Summe aller dieser äussern Prismen (sie heisse S) bildet also, in Bezug auf das Parallelopipedon AS = 1, eine unendliche Reihe von der Form:

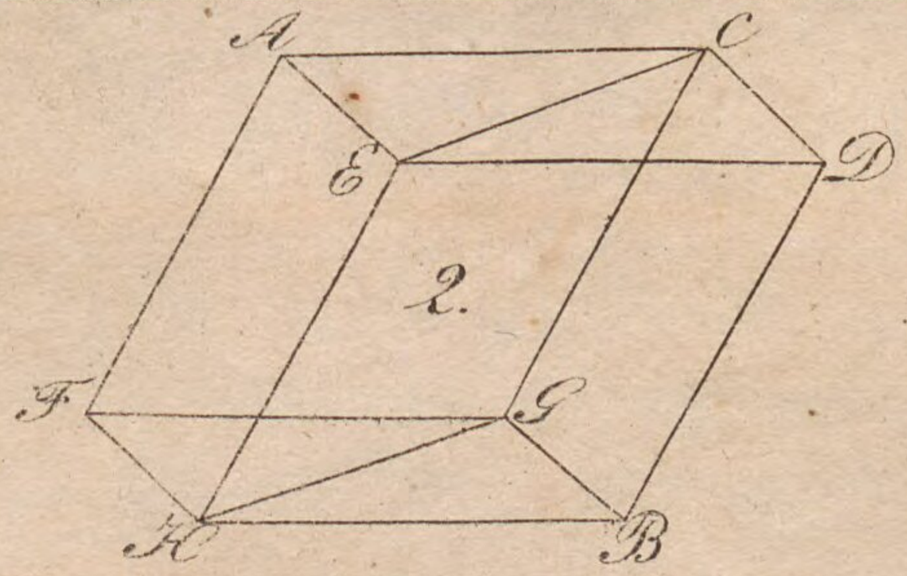
$$S = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots\ldots$$

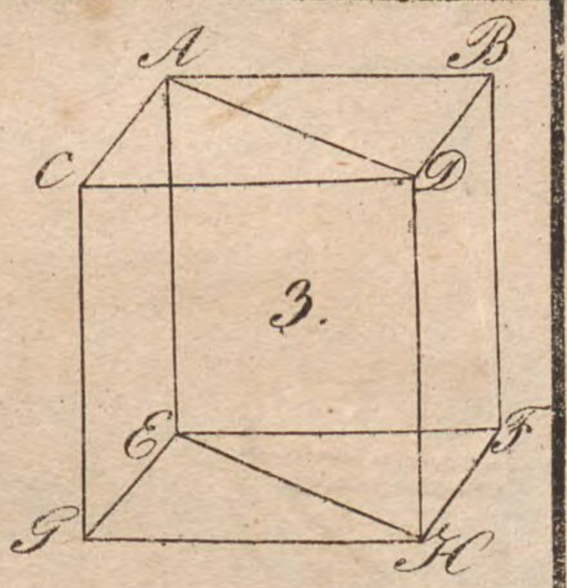
II. Aus der Arithmetik ist aber bekannt, daß, wenn a das erste Glied, e der Exponent und S die Summe einer unendlichen Reihe ausdrückt, $S = \frac{a}{1 - e}$ sey.

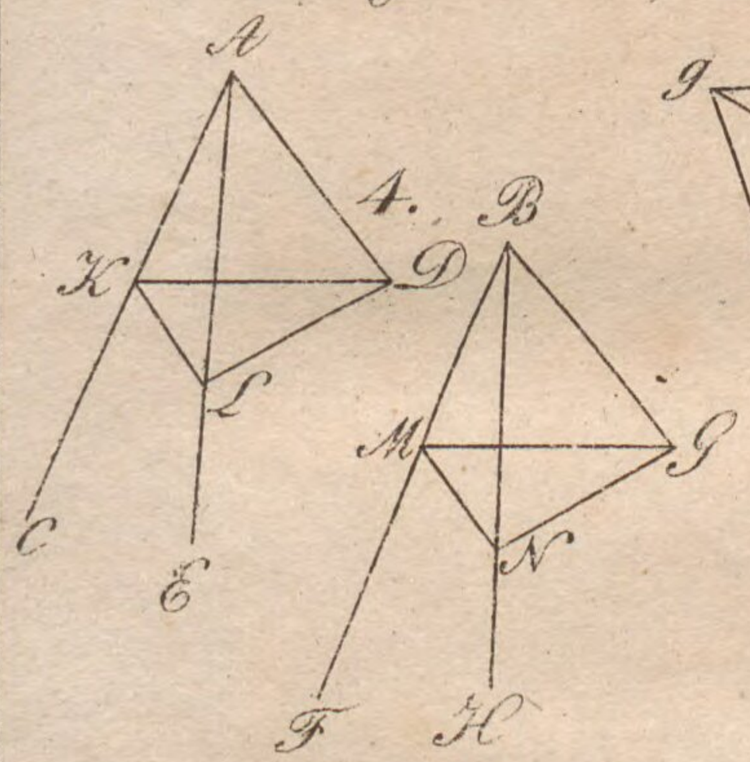
Daher ist hier $S = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

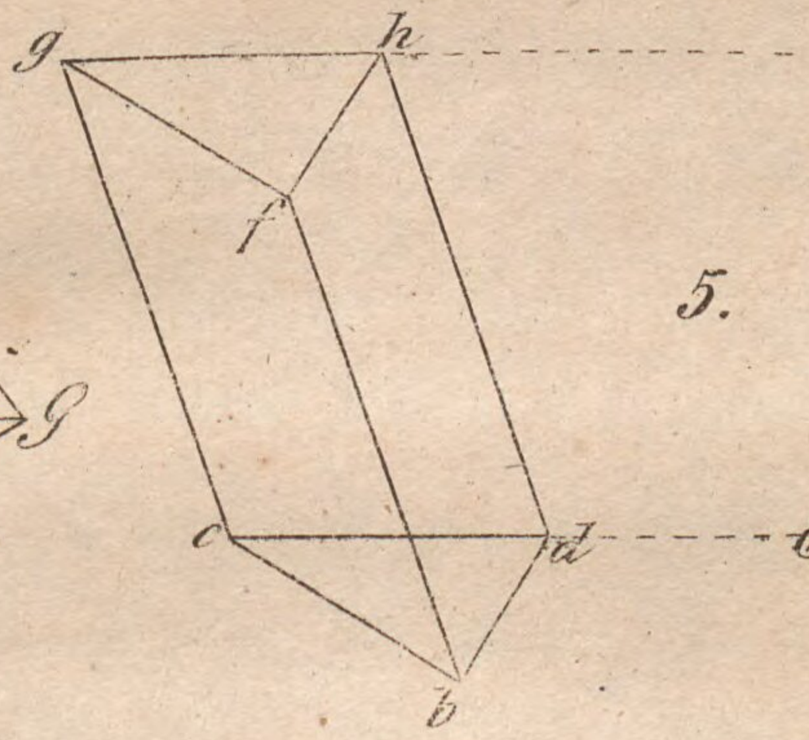
III. Auf gleiche Weise ist aber auch die Summe aller äusseren Parallelopipeden im dreyeckigen Prisma GCK $= \frac{1}{2}$ AS. Da nun die Summe in II. mit dieser Summe vollkommen einerley ist, weil beyde aus gleich vielen und gleich großen Gliedern bestehen, so ist auch Prisma GCS = Prisma GCK $= \frac{1}{2}$ Parallelopipedon AS.

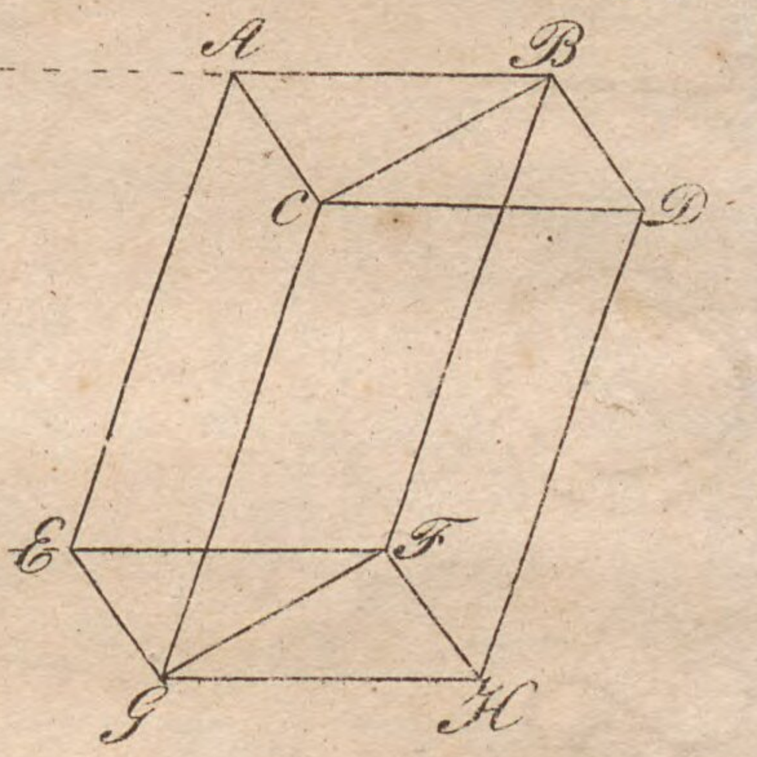

C
B
G
F
1.
D
H
A
E

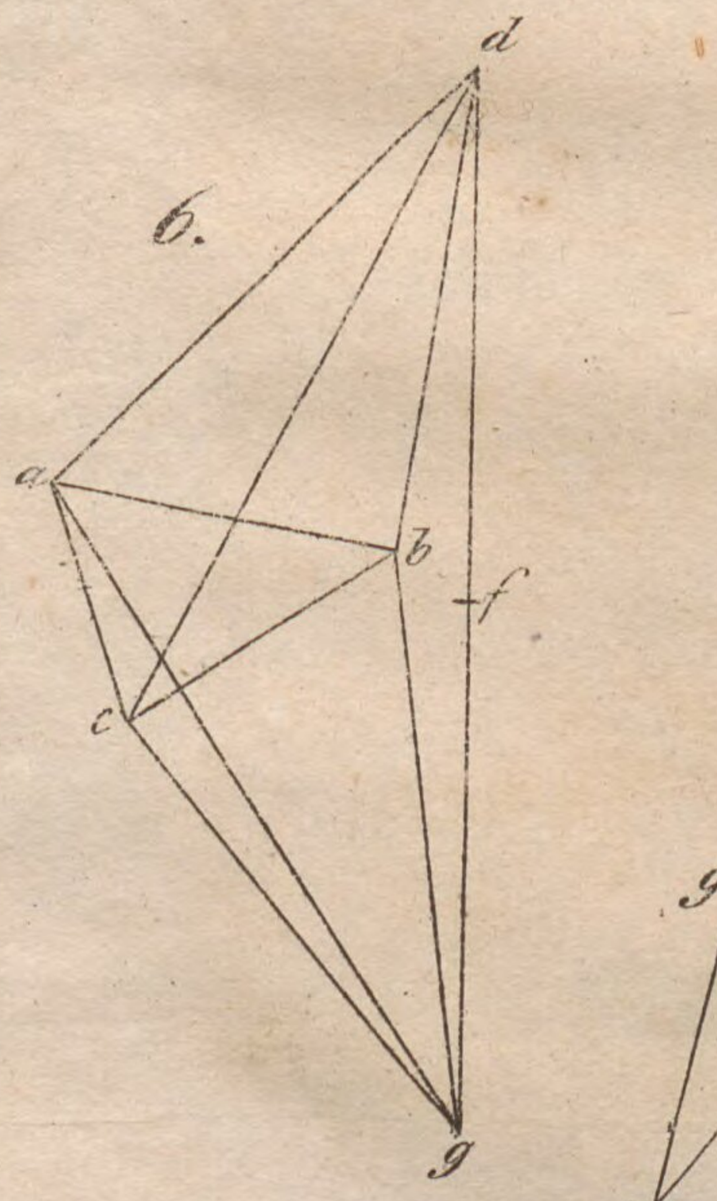

A
C
E
D
2.
F
G
H
B

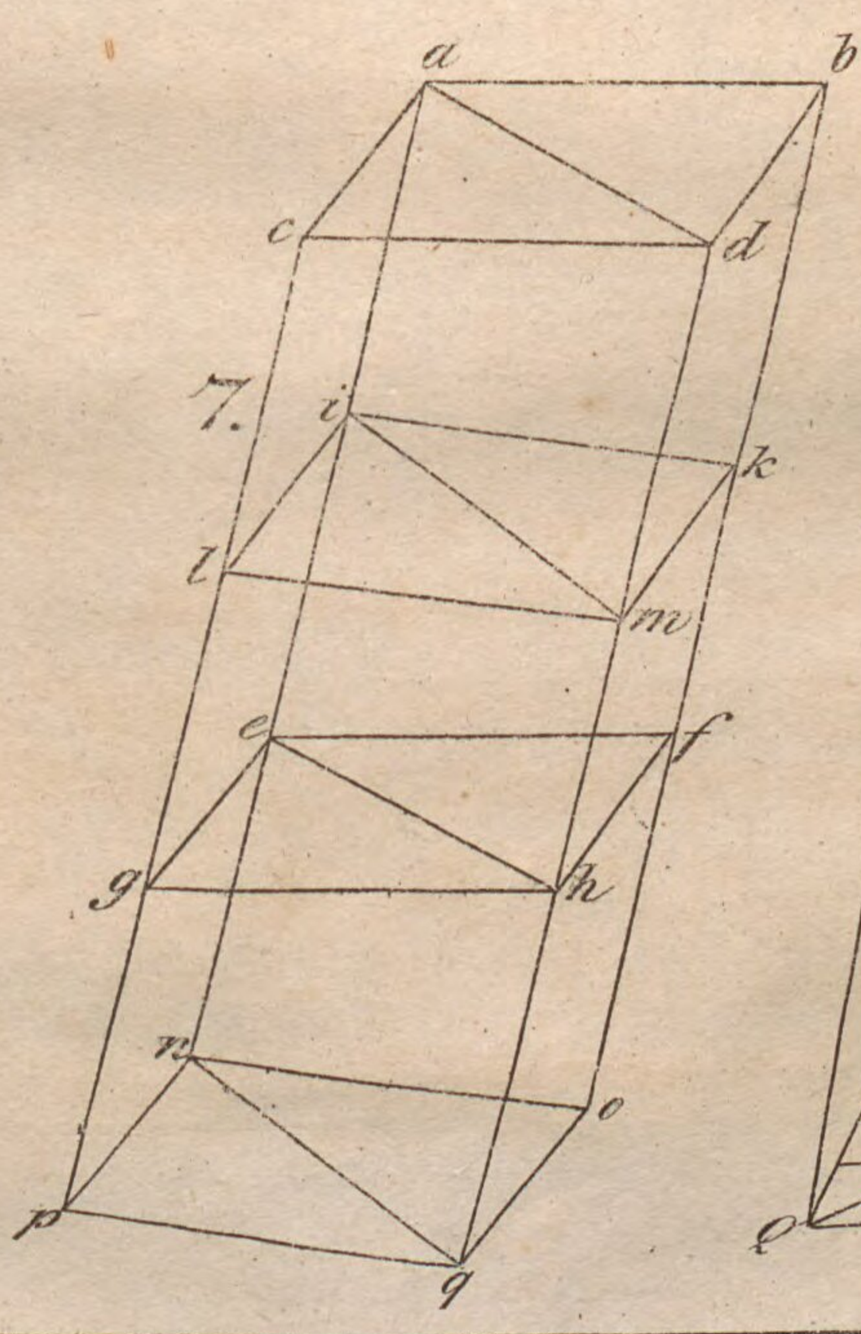

A
B
C
D
3.
E
F
G
H

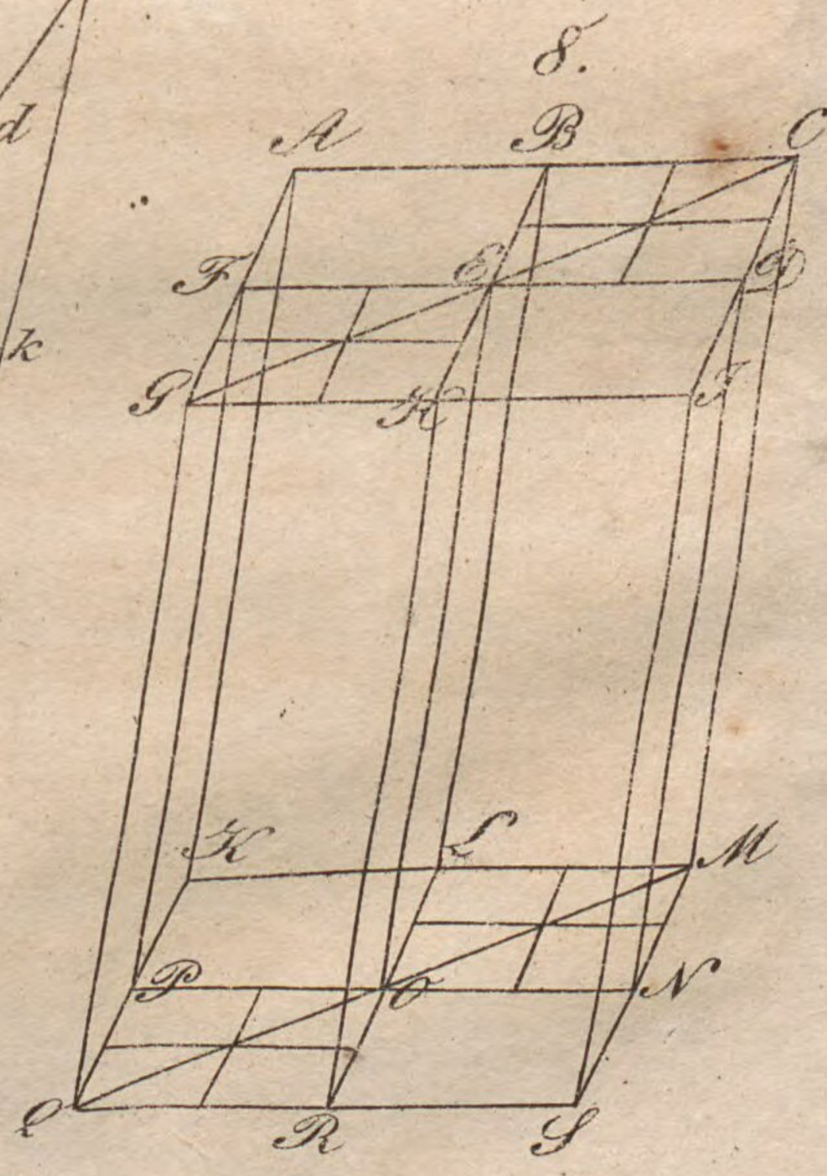

A
4.
B
K
D
L
C
E
M
G
N
F
H


g
h
f
5.
c
d
b


A
B
C
D
E
F
G
H


d
6.
a
b
c
f
g


a
b
c
d
7.
i
k
l
m
e
f
g
h
n
o
p
q


8.
A
B
C
F
E
D
G
H
K
L
M
P
O
N
Q
R
S

Sätze aus dem ersten Lehrcurse.

Aus der Philosophie.

I. Fundamentalphilosophie.

1. Ohne Philosophie ist keine höhere Menschen-Bildung möglich. Dies beweiset ihr Begriff und ihr Umfang.
2. So verschieden auch die Erklärungen der Philosophie seyn mögen, so stimmen sie darin überein, daß ihr Gegenstand nicht das Einzelne, sondern die Erkenntniß des Ganzen sey.
3. Aus dem Bewußtseyn entspringet der bedeutende Gegensatz zwischen dem Sinnlichen und Geistigen.
4. Daher ist das Bewußtseyn der schicklichste Standpunct für die Elementarphilosophie.

II. Empirische Psychologie.

1. Gleichwie in der physischen Körperlehre, so muß auch im psychischen Gebiete die Untersuchung vom Phänomene zum Gesetze schreiten.
2. Die Sinnlichkeit, welche sich durch die Receptivität characterisirt, ist entweder die äußere, (in der Form des Raumes), oder die innere (in der Form der Zeit).
3. Nicht der Sinn trügt, sondern meist die Phantasie, oder die unrichtige Anwendung der Verstandes-Regeln.

4. Außer dem Gesetze der Gleichzeitigkeit und der Aehnlichkeit braucht man kein drittes Gesetz zur Wiedererweckung der Vorstellungen anzuerkennen.

5. Nicht unerklärlich, doch immer noch tiefer zu erforschen, sind die Zustände des Traumes und Enthusiasmus, der Schwärmerey und Verrücktheit.

III. Logik.

1. Da das menschliche Denken auf einer unläugbaren Gesetzmäßigkeit beruht, so ist die Logik, als Lehre der Denkgesetze, unabhängig von anthropologischen und metaphysischen Hülfssätzen.

2. Der Satz der Einstimmung (unrichtig: der Identität) bildet das höchste Princip des Denkens. Der Grundsatz der Entgegensetzung (besser, als: des Widerspruchs) ist sein negativer Ausdruck; auch der Satz des Grundes und das Princip des ausgeschlossenen Dritten sind als allgemeine Grundgesetze der Denkens zu betrachten.

3. Zur Bildung der Begriffe gehört sowohl eine analytische, als eine synthetische Operation des Geistes.

4. Quantität, Qualität, Relation und Modalität sind die vier Hauptgesichtspuncte, woraus man die Begriffe übersehen kann.

5. Ihren Inhalt und Umfang anzugeben, ist der Zweck der Definition und der Division.

6. Im verneinenden Urtheile fällt die Negation auf die Copula, im unendlichen dagegen auf das Prädicat.

7. Nicht um schließen zu lernen, sondern um den Streit über die Richtigkeit der Schlüsse zu schlichten, wurde die Syllogistik erfunden.

8. Die Lehre von den Figuren der Schlüsse ist zur künstlichen Beurtheilung derselben unentbehrlich.

9. Obwohl der directe Beweis nicht überzeugender ist, als der indirecte, so steht er diesem doch an befriedigender Beruhigung nach.

10. Die Methode der Induction ist die umgekehrte von jener des Syllogismus. Folglich sind beyde wesentlich verschieden.

IV. Metaphysik.

1. Die Metaphysik ist die Wissenschaft vom realen Grunde und dem wahrhaftigen Wesen der Dinge.

2. Sie behandelt die Erfahrungserkenntniß als eine höhere Aufgabe, um ihr das Gesetzmäßige nicht blos abzugewinnen, sondern vielmehr um dasselbe als mit dem ursprünglichen Gesetze des Geistes übereinstimmend zu erweisen und das Wesentliche, Bleibende und Beharrliche davon zu erkennen.

3. Der Metaphysik muß als Einleitung eine durchgeführte Critik der menschlichen Erkenntnißkräfte vorausgehen.

4. So allein wird ausgemittelt, was an der gesammten Aufgabe der Metaphysik objectiv, und was subjectiv, — und welches Verhältniß zwischen beyden ist.

5. Auf diese Critik der Erkenntnißkräfte müssen auch die verschiedenen Ansichten der neueren Philosophie, als eben so viele Auflösungsweisen jener Aufgabe, bezogen und damit ausgeglichen werden.

6. Die Aufgabe der Metaphysik selbst zerfällt in vier Hauptabtheilungen:

   1) die Lehre vom wahren und vom scheinbaren Seyn, so wie vom Nichtseyn und den gesammten Verhältnissen, Widersprüchen und Ausgleichungen, die sich mit und in denselben ergeben (Ontologie).

   2) Die Lehre vom Daseyn nach Wahrheit und Schein, mithin von der Welt, ihren Verwicklungen und Antinomien und der wahren Ordnung derselben (Cosmologie).

   3) Die Lehre vom Bewußtseyn und dem Begriffe des Seyns und Daseyns in demselben als einem und realen Selbstbewußtseyn — Begriff des Geistes und Befreyung desselben von allen subjectiven Schranken (Psychologie).

   4) Die Lehre von der Unmöglichkeit, durch menschliche Erkenntnißkräfte über den Begriff des Seyns als ein grundreales und in sich nothwendig Abgeschlossenes hinauszukommen und der vollständige Erweis von der Gränze der philosophischen Erkenntniß in der Frage nach dem Grunde alles Seyns (Theologie).

7. Seyn, Welt und Geist werden zuletzt in Vernunftanschauungen (Ideen) erkannt und diese Erkenntniß bedarf als eine unmittelbare so wenig des Erweisens aus dem Reflexionsvermögen, als der Sinn die Farbe, den Ton ꝛc. zu erweisen hat, die er empfindrt.

8. Es laufen daher alle Fragen und Antworten, welche über ontologische, kosmologische und psychologische Probleme aus dem Reflexionsvermögen hervorgehen, auf das Endlose hinaus und bringen keine Frucht, sobald das Wesen jener Vernunftanschauungen hiedurch näher bestimmt werden soll, als es schon in dieser unmittelbaren Erkenntniß ist.

9. Nur in so ferne solche Verhältnisse, welche, jenen Ideen immanent, nur innerhalb denselben als geistige Momente und wirksame Kräfte begriffen werden können, im Lichte der Ideen selbst betrachtet und in ihrer besondern Harmonie erkannt werden, sind ontologische, kosmologische und psychologische Fragen und Antworten gestattet und von Erfolg.

10. Die sämmtlichen bisher versuchten Beweise vom Daseyn, den Eigenschaften und Werken Gottes sind mangelhaft und ganz ohne zureichend beweisende Kraft, weil sie, noch so scharf geführt, über jene Vernunft-Anschauungen vom Seyn, der Welt und dem Geiste nicht hinaus können; eben an dieser Gränze aber sich zeigen muß, daß alle jene Beweise anthropomorphistisch, mithin anmaßend und transcendent sind, und das göttliche Wesen weder mit dem Sinne noch mit der Vernunft, sondern allein mit dem Glauben erkannt werden kann, der im Grunde der Realität des Seyns selbst haftet und nicht von derselben sich lostrennend dieselbe blos betrachten, begränzen, gestalten und begreifen, sondern in ihr leben und seyn will.

Aus der Mathematik.

I. Einleitung.

Ihr Zweck ist die Darstellung des Begriffs, der Haupttheile, der Methode und des Nutzens der Mathematik.

II. Reine Arithmetik.

1. Vermehren und Vermindern sind die einzig möglichen Veränderungen mit unstetigen Größen. Aus jenen gehen die vier Grundrechnungen der Arithmetik hervor.

2. Obwohl das Decimal-Zahlensystem willkührlich ist, so verdient es sowohl theoretisch, als practisch den Vorzug vor andern.

3. Decimalbrüche entspringen unmittelbar aus dem arithmetischen Zahlensysteme. Daher soll sich ihr Vortrag an die Lehre von ganzen Zahlen anschließen.

4. Die Verwandlung vieler gemeinen Brüche in Decimalbrüche beweiset den für die Mathesis wichtigen Satz, daß sich eine Größe einer andern ins Unendliche annähern kann, ohne sie je zu erreichen.

5. Das Vergleichen, Potenziren nnd Wurzelausziehen bilden die höhern Rechnungsoperationen.

6. Die Nothwendigkeit der Irrationalzahlen läßt sich auf's Evidenteste erweisen.

7. Der Ausdruck: negative Größen sind weniger als nichts, hat einen verständigen mathematischen Sinn.

8. In der Proportionslehre liegt ein unerschöpflicher Reichthum von theoretischen und practischen Anwendungen verborgen.

9. Durch Buchstabenrechnung erhebt sich der Geist vom Besondern zum Allgemeinen. Sie bildet den Uebergang zum höhern mathematischen Wissen.

10. Dem Satze: Jede Größe auf der Nullpotenz ist der Einheit gleich, fehlt es nicht an mathematischer Schärfe und Bestimmtheit.

III. Angewandte Arithmetik.

1. Ausführung der niedern Rechnungsarten in benannten, ganzen und gebrochenen Zahlen.

2. Mannigfaltige Anwendungen der practischen Proportions-Rechnungen auf Regel Detri, Dequinque. Gesellschafts- und Vermischungs-Rechnung.

IV. Reine Geometrie.

1. Die Gewißheit der Geometrie ist in der Unveränderlichkeit der menschlichen Denkgesetze begründet; ihre Evidenz aber in der Klarheit ihrer Anschauungen.
2. Daher sind alle Bemühungen, die geometrischen Fundamental-Objecte und Grundsätze aus blosen Begriffen zu deduciren, überflüssig und mangelhaft.
3. Das Studium der geometrischen Wissenschaft setzt demnach die Durchführung einer geometrischen Anschauungslehre voraus.
4. Auch die Langsdorffischen Raumpuncte können der strengen Geometrie nicht zur Grundlage dienen.
5. Im streng geometrischen Sinne kann keine Linie ans der Bewegung eines geometrischen Punctes entstehen.
6. Jedes ältere und neuere System der Parallel-Linien bietet dem scharfen Critiker Stoff zu gegründeten Bemerkungen dar. Die Evidenz dieser Lehre beruhet auf Gründen der Anschauung.
7. Wolf's Erklärung der Aehnlichkeit räumlicher Objecte ist nur dann brauchbar, wenn sie durch ächt geometrische Vordersätze begründet wird.

V. Practische Geometrie.

1. Erklärung der Werkzeuge und Methoden, um gerade Linien auf dem Felde abzustecken und zu messen.
2. Bestimmung des Abstandes zweyer Puncte in der Ebene:
   a) durch Ketten und Stäbe,
   b) durch das Meßtischchen,
   c) durch das Astrolabium.

3. Verschiedene Methoden, jede auf dem Felde gegebene Fläche in den Grund zu legen.
4. Den Flächen-Inhalt jeder in den Grund gelegten Figur zu berechnen.
5. Vom Theilen der Felder.
6. Vom Höhenmessen.

VI. Algebra.

1. Begriff der Algebra, der Gleichungen und ihrer verschiedenen Arten.
2. Methode, Gleichungen zu bilden und aufzulösen.
3. Auflösung der Gleichungen vom ersten uud zweyten Grade.

Aus der Universalgeschichte.

1. Das ganze Menschengeschlecht ist ein System von geistigen Kräften, welche einerseits in die irdische Natur eingreifen, andrerseits aber sich auf das himmlische Leben beziehen. Die Bestrebungen und Entwicklungen dieser Kräfte machen den Inhalt der Universalgeschichte aus.
2. Der Begriff der Universalgeschichte kann nur unter der Bedingung wohl gefaßt und durchgeführt werden, wenn nämlich das Menschengeschlecht als von den ältesten Zeiten an in einem zusammenhängenden Lebenslaufe begriffen, betrachtet und in dessen Zeitaltern gründlich erforscht wird.
3. Die Universalgeschichte bietet große, scharf abstechende Licht- und Schattenmassen dar, sie zeigt das Leben des Menschen in mächtigen, unverkennbaren Umrissen und Gestalten; sie beleuchtet also deutlicher, als die Geschichte der Einzelnen vermag, den Gang der Entwicklung des Menschen zur Selbsterkenntniß, und läßt uns die Führungen Gottes im Menschengeschlecht anf eine großartige Weise erkennen.
4. So erläutert dann auch die Universalgeschichte, als das Buch der Vorsehung in Führung aller Völker, die heiligen Bücher des offenbarten Wortes Gottes, und giebt in engern und weitern Kreisen die anschaulichsten Beyspiele und Belege dazu.

5. Das Studium der Universalgeschichte gewöhnt den einzelnen Menschen sich selbst zu bescheiden, seine kleine Welt der großen Welt des Ganzen niemals einseitig und feindselig entgegen zu setzen, vielmehr den eigenthümlichen Beruf und Wirkungskreis immer genauer zu erkennen, und auf Erfüllung desselben gewissenhaft zu verharren, um so mehr, da er durch sie lernt, sich als ein bestimmtes Glied des Ganzen, und das Ganze als durch alle Zeiten und Räume innig verbunden anzusehen. Sie ist die Schule der wahren Humanität.

6. Das patriarchalische Leben ist die unerschütterliche Grundlage der gesammten Menschengeschichte.

7. Die alte Geschichte, oder die Geschichte der Naturstaaten, ist mit dem Untergange der römischen Welt gänzlich abgeschlossen.

8. Von Verkündigung des Evangeliums an, hat die Geschichte einen andern Character; sie wird Geschichte der Berichtigung und allmähligen Läuterung bloser Naturkräfte; Geschichte einer höhern Gemeinschaft und eines Völkerverständnisses, nach welchem einst das ganze Menschengeschlecht als eine Familie sich betrachten und behandeln soll.

9. Dieser zweyte große Haupttheil der Geschichte ist noch lange nicht abgeschlossen. In ihm scheint eine sehr entscheidende Epoche begonnen zu haben, die Epoche einer, alle menschliche Angelegenheiten achtenden und in sich schließenden, rechtlichen Staatsverfassung. Aus den großen Zertrümmerungen erhebt sich ein neues Leben.

10. Der Gang der Entwicklungen und Bewegungen in der Menschengeschichte steht in bedeutungsvoller Beziehung mit der Erdgeschichte.

Aus der Naturgeschichte.

1. Die Gränzlinie zwischen den Thieren und Pflanzen ist unsicher und unbestimmt. Alle lebende und empfindende Wesen haben einige gleiche Urcharactere. Der höhere und mindere Grad von Vollkommenheit und Ausbildung söndert dieselben in die zwey großen Reiche der Thiere und Pflanzen, ohne daß jedoch einzelne wesentliche Unterscheidungs-Merkmale dieser beyden organischen Reiche ganz vermißt würden.

2. Die Lebenskraft hat Grade und Stufen der Wirksamkeit im Verhältniß der materiellen Zusammensetzung der Körper.
3. Der Bildungstrieb gehört unter die allgemeinen Eigenschaften organischer Körper; er ist verschieden von der, in der todten Materie wirksamen, Kristallisations-Kraft. Die Epigenesis ist die vernunftmäßigere, den Gesetzen der Natur zusagendere, Entstehungshypothese organischer Wesen. Gegen das Evolutions-System sprechen die gewichtvollsten Gründe.
4. Racen und Spielarten sind wesentlich verschieden. Beurtheilung der Meinungen Buffon's und Blumenbach's. Verschieden sind die Ursachen der Ausartung.
5. In der organischen Schöpfung sind einige Species untergegangen. Die versteinerten Reste verlohrner Geschöpfe geben wichtige Aufschlüsse über die Geschichte der Veränderungen des Erdbodens, veranlassen aber auch leicht cosmologische Irrthümer.
6. Die Menschenracen lassen sich auf 5 zurückführen. Uebergänge derselben in einander sind bemerkbar. Der Mensch ist eine isolirte Species in der Schöpfung, und von dem ähnlichsten Geschöpfe, dem Orang Outang, wesentlich verschieden.
7. Der Erholungsschlaf ist eine Eigenthümlichkeit der Thiere. Die Pflanzen entbehren denselben. Die Ursachen des Winterschlafes einiger Thiergattungen sind nicht identisch mit denen der Wanderungen der Thiere, und diese nicht Folgen wechselnder, durch Zeit und Ortsverhältnisse bedungener Bedürfnisse. Periodische Züge einzelner Quadrupeden und Insecten machen hievon eine Ausnahme.
8. In der Natur ist zwar eine Verkettung der Wesen bemerkbar, keineswegs aber eine strenge Stufenfolge der Geschöpfe erweislich. Das System der Physico-Theologen ist daher verwerflich.

Aus der Aesthetik.

1. Ursprung der schönen Künste; anfänglicher roher Zustand derselben; allmähliche Vervollkommnung nebst den Ursachen derselben; stufenweise Entstehung einzelner Kunsttheorien. Endliche Entstehung der Aesthetik, oder der allgemeinen Lehre des Schönen in der Natur und Kunst.

2. Nutzen und Hülfswissenschaften der Aesthetik.

3. Von der Kunst überhaupt. Stoff, Wesen, Zweck der Künste überhaupt. Eintheilung derselben. Klasse der nützlichen freyen Künste, der schönen, der blos angenehmen. Ausscheidung der letzten aus der Klasse der schönen Künste.

4. Gartenkunst überhaupt. Eintheilung derselben in gemeine und schöne; in wiefern gemeine Gärten einer Verschönerung fähig sind. Schöne Gartenkunst; zwey Gattungen derselben; die französische Gartenkunst. Ursprung, Character und Beschreibung eines französischen Gartens. Englische Gartenkunst. Erklärung und Hauptbemerkungen über dieselbe in Hinsicht auf das Ganze und ihre Theile.

5. Baukunst. Eintheilung in bürgerliche und schöne Baukunst. In wie weit die erstere einer Verschönerung fähig ist. Was ist schöne Baukunst? Griechische, gothische Baukunst? Säulenordnung? ihr Character; Symmetrie? Eurythmie; architectonische Schönheitslinien. Architectonische Verzierungen. Wo ist die schöne Baukunst vorzüglich anwendbar, und wo erreicht sie einen rein schönen Character?

6. Tanzkunst. Ursprung, stufenweise Ausbildung, Eintheilung in gemeine und theatralische Tänze. Verschiedener Character der gemeinen Tänze. Was ist niedere Tanzkunst, Rhytmus, einfacher und zusammengesetzter Tanzschrittt (pas)? Wie entsteht das Gefühl der Ganzheit (Totalität) oder Geschlossenheit eines Tanzes? Schönheitslinie des Tanzes oder der schönen Bewegung.

7. Tonkunst. Ursprung derselben. Kann sie, wie Poesie, Mahlerey und Plastik, bestimmte Ideen und Empfindungen ausdrücken? Was ist niedere und höhere Tonkunst, Melodie, Harmonie? Was wird zu einem guten Tonstück überhaupt erfordert? Wodurch gefällt die Tonkunst?

8. Was ist Mimik? Höhere oder theatralische Tanzkunst? Pantomime, Schauspielkunst?

9. Erklärung der zeichnenden und bildenden Künste.

10. Verbindung mehrerer schönen Künste zur Hervorbringung eines einzigen schönen Kunstwerks. Regeln, die dabey zu beobachten sind.

11. Nutzen der schönen Künste, aus dem Zwecke der schönen Künste, aus dem Zwecke des Künstlers und der Stufe der Kultur entwickelt.

12. Haupt-Epochen der Geschichte der schönen Künste.

Aus der classischen Literatur.

Cicero de Officiis das erste Buch und C. I. — XII. vom zweyten Buche.

Xenophon aus den socratischen Denkwürdigkeiten — Platon Apologie des Socrates — Kriton — Fragmente aus Phädon — Plutarch über die Furcht vor dem Tode.

Sätze aus dem zweyten Lehrcurse.

Aus der Physik.

1. Weder der blose Empirismus, noch der blos speculative Dogmatismus ist den Fortschritten des physischen Studiums förderlich.

2. Daher muß auch der physische Lehrvortrag ein practisch-theoretischer, oder ein theoretisch-practischer seyn.

3. Worin die Natur des Materiellen bestehe, wissen wir nicht. Weder das dynamische, noch das atomistische System giebt uns befriedigende Einsicht in das Wesen der Materie.

4. Was man in der Naturlehre Urkräfte, oder Grundkräfte heißt, sind nichts anderst, als Ur- oder Grundphänomene.

5. Naturerscheinungen werden daher erkläret, wenn man niedere Phänomene aus höheren, oder den höchsten gesetzmäßig ableiten kann.

6. Das höchste Urphänomen der Sinnenwelt ist die Bewegung. Selbst die scheinbare Ruhe geht aus dem Gegensatze bewegender Kräfte hervor.

7. Flüssigkeiten stehen unter dem Gesetze der Kugelform, feste Körper unter dem der Kryſtalliſation.

8. Die Wirkung der Haarröhrchen gewährt uns eine klare Einſicht in viele Naturerſcheinungen.

9. Am Füglichſten werden die Wirkungen der Wärme aus der Annahme eines materiellen Stoffes abgeleitet.

10. Dieſer Wärmeſtoff erſcheint bald im freyen, bald im gebundenen Zuſtande.

11. Durch ſeine Einwirkung erklärt man ſehr einfach die verſchiedenen Aggregatzuſtände der Körper.

12. Von größter Wichtigkeit ſind die Geſetze über das Binden und Freywerden der Wärme.

13. Gaſe und Dämpfe ſind weſentlich verſchieden.

14. Aus der überwiegenden Summe der Anziehungskräfte heterogener Körpertheilchen entſpringen ſämmtliche Erſcheinungen der chemiſchen Affinität.

15. Analyſis und Syntheſis ſind die einzigen Mittel, wodurch der Chemiker das Innere der Körper erforſcht; letztere iſt oft unmöglich.

16. Die phyſiſchen Eigenſchaften der atmoſphäriſchen Luft ſind durch ihre Schwere und Expanſivkraft bedingt.

17. Zur Beſtimmung des Druckes der atmoſphäriſchen Luft iſt das de Lücſche Heberbarometer das brauchbarſte Werkzeug. Das Barometer als Wetterglas iſt trüglich.

18. Ob das Mariottiſche Geſetz für jede denkbare Verdünnung und Verdichtung der Luft gelte, iſt zweifelhaft

19. Bey Beſtimmung der Grenze unſeres Luftkreiſes muß die Schwere der Luft ihre expanſive Kraft beſchränken.

20. Die atmoſphäriſche Luft iſt kein Element, ſondern eine Verbindung heterogener, durch ein beſtändiges Miſchungs-Verhältniß verbundener Grundſtoffe.

21. Sämmtliche Erscheinungen der Hydrostatik gehen aus der leichten Beweglichkeit liquider Körper in ihren Theilchen, verbunden mit ihrer Schwere, hervor.

22. Daß das reine Wasser kein Elementarstoff sey, kann analytisch und synthetisch erwiesen werden.

23. Eine wirkliche Auflösung des Wassers und der atmosphärischen Luft läßt sich nicht durch directe Versuche darthun. Jedes Verdünsten ist vielmehr eine wahre Verdampfung.

24. Nicht aus dem Erzittern der kleinsten Theilchen der schallerregenden Körper, sondern durch ein pendelartiges Schwingen größerer Stellen in ihnen entsteht die Erregung des Schalles.

25. Franklin's Theorie der Electricität ist der Symmerischen vorzuziehen.

26. Stahl's Phlogiston läßt sich nicht mehr vertheidigen; aber auch das antiphlogistische System muß noch vervollkommnet werden.

Aus der angewandten Mathematik.

1. Das Gebiet der angewandten Mathematik ist grenzenlos; doch lassen sich, der bequemern Uebersicht wegen, vier Haupttheile unterscheiden.

2. Obschon wir das Wesen der Kraft, in physischer Hinsicht, nicht erkennen, so besitzt die reine Bewegungslehre demungeachtet eine volle geometrische Evidenz.

3. Todte Kräfte sind Undinge.

4. Auch giebt es keine Trägheitskraft in der Natur.

5. Aus der Lehre von der Zusammensetzung und Auflösung der Kräfte, ergeben sich die schönsten Anwendungen auf die Erscheinungen der Natur.

6. Jeder Wirkung ist die Gegenwirkung gleich und entgegengesetzt.

7. Kreisförmige und elliptische Bewegungen entspringen aus der Wechselwirkung der Centralkräfte.

8. Lehrreich für die Theorie, und wichtig für die practische Anwendung, ist die Betrachtung des Schwerpunctes.

9. Auch die Bestimmung des Schwerpunctes geometrischer Objecte führt zu interessanten Resultaten.

10. Die Theorie des Hebels enthält den Grundstein, worauf die Mechanik ihr Gebäude errichtet.

11. Aus der Hebellehre geht der so wichtige Satz hervor: Was bey einer Maschine an Kraft gewonnen wird, geht an Bewegung verlohren, und umgekehrt.

12. Durch die Theorie des Pendels, verbunden mit practischen Versuchen, sind wir mit den wichtigsten Wahrheiten bereichert worden.

13. So unbekannt wir auch mit der Natur des Lichtes sind, so ist doch Newton's Lehre der Eulerischen vorzuziehen.

14. Daß die Geschwindigkeit des Lichtes nicht augenblicklich sey, haben Römer's Beobachtungen erwiesen.

15. Im leeren Raume steht die Intensität der Erleuchtung im umgekehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung vom leuchtenden Puncte.

16. Auf dem Reflexionsgesetze des Lichtes beruhen alle Erscheinungen der Katoptrik.

17. Als Phänomen läßt sich die Reflexion des Lichtes am Bequemsten aus dessen Expansivkraft, verbunden mit dem Mangel einer Anziehung gegen die spiegelnde Fläche, ableiten.

18. In den bekannten Refractions-Verhältnissen liegt der Erklärungsgrund der dioptrischen Erscheinungen.

19. Diese Brechung des Lichtes in durchsichtigen Zwischenkörpern geht aus einer Attractivkraft desselben gegen die brechenden Substanzen hervor.

Aus der practischen Philosophie.

1. Die practische Philosophie muß vom Grundwesen des Individuum, vom wirksamen Geiste selbst, als ihrem eigenthümlichen Element ausgehen.

2. Was aus dem Menschen entspringt und in irgend einer Art von Wirksamkeit sich bey ihm zu erkennen giebt, mag wohl hie und da von Aussen angeregt seyn; aber der Anfang des eignen Thuns und Lassens ist völlig absolut und ein unläugbares Gefühl vernichtet den Irrthum, daß der Anfang einer Gesinnung oder Handlung in der Anregung selbst liege.

3. Die Freyheit ist an sich ein Geheimniß, worin das klare Verhältniß, welches wir in allem Nothwendigen sehen, unterscheiden, in sich beziehen und ausgleichen, nicht zu erkennen ist. Sie kann nur durch das sittliche Leben selbst lebendig erkannt und verstanden werden, nicht durch die Theorie, welche überall dem Nothwendigen angehört.

4. Das blose Gefühl der Freyheit ist noch dem Drange und den Gefahren des Lebens ausgesetzt. Die practische Philosophie hat zur Aufgabe, dieses Grundgefühl des Menschen zum klaren Verständniß zu bringen, ohne dasselbe jemals zu vernichten.

5. Der im Gewissen (certum et consciens zumal) wirksame, in ihm verharrende d. h. der gewissenhafte Wille ist allein der vollkommen freye zu nennen; denn in ihm ist der Mensch allein frey von den Banden der Nothwendigkeit, welche das Unsichere, Ungewisse halten, da nur dieses das Nothwendige nothwendig macht; das Gewisse aber die Haltung in sich selbst hat, daher keines Verhältnisses, keiner Causalverbindung, keines Zugs oder Triebes bedarf; sondern aus dem göttlichen Geheimniß selbst auf unmittelbare Weise seine Macht hat und völlig im Freyen schwebt.

6. Der Wille, gewissenhaft zu seyn, ist das wahre practische und für das ganze sittliche Leben zureichende Princip. In diesem ohne Unterlaß Fortwirken, heißt sittlich handeln; dasselbe nach seiner ganzen Fruchtbarkeit in Erzeugung des sittlichen Lebens betrachten, seine Entwicklungen im Geiste verfolgen, ist die Aufgabe der Wissenschaft der Ethik.

7. Die Erkenntniß dessen, was dem Leben Vollständigkeit und Sicherstellung verleihet, und den Menschen durch seine ganze Bildungsgeschichte begleitet und hält, ist zugleich das Ziel aller Wünsche und Bestrebungen: es ist das höchste Gut.

8. Das höchste Gut kann in seiner Fülle und Herrlichkeit durch menschliche Kräfte für sich allein weder erreicht, noch weniger ausschließend besessen werden. Das Bestreben nach demselben gedeihet nur dem guten Willen, welchem auch die geringste Abweichung davon vernehmlich (durch Mitwissen, conscientia) wird.

9. Das Böse äußert unläugbar eine wirkliche Kraft und ist nicht blos eine Beschränkung des Guten oder ein minderer Grad der Vollkommenheit. Es ist also nicht blos dasjenige, was des Guten ermangelt, sondern es ist dem Guten schlechthin feind.

10. Der Grund des Bösen kann daher nur in einer wirklichen und zwar sich selbst bestimmenden, freyen Kraft liegen, welche von der Gemeinschaft aller Kräfte abweicht und sich derselben entgegengesetzt.

11. Es ist die ungetheilte, practische Grundkraft selbst, der ganze Wille, welche entweder im Guten beharret und wirkt, oder das Böse will und betreibt.

12. Das Böse ist als solches keine Creatur, es ist vielmehr ein Sichselbsterheben der Creatur über die ihr verliehenen Kräfte, wovon dann die Erniedrigung unter diese Kräfte eine unausbleibliche Folge ist.

13. Das Böse hat keine ordentliche und natürliche Entwickelung, sondern greift nur ein in die Natur und kleidet sich in ihre Gestalten, ohne jemals in einer einzigen Bestand und Ruhe zu haben. Sein wirkliches Daseyn ist gewaltsam und trägt die Selbstvernichtung in sich.

14. Ueber den guten Willen hat das Böse niemals Gewalt, der Sieg bleibt dem Guten gewiß.

15. Der Wille, als die practische Kraft des Menschen, ist schlechthin verpflichtet, ein guter Wille zu seyn.

Aus der Philosophie der Geschichte der Natur und des Menschen.

1. Die Natur hat von ihren dunkeln Abgründen und dem ersten Scheine des Lebens bis zum heiteren Lichte des Geistes herauf eine tief und innig zusammenhängende Geschichte.

2. Alle unsere einzelne Naturwissenschaften: Astronomie, Geognosie, Botanik, Zoologie und Anthropologie, so wie alle Erkenntnisse der Physik und Chemie werden durch jenen großen Zusammenhang erst ihren wahren Einklang finden; es wird sich erkennen und ergänzen, was jetzt noch so oft einseitig, fremd und scheu gegen einander ist.

3. Die Philosophie der Geschichte der Natur soll diesem Zusammenhange, wie überhaupt dem Gesetze der Erscheinungen, nachforschen, mit deren Mannigfaltigkeit uns die gewöhnlich sogenannte Naturgeschichte bekannt macht.

4. Sie geht daher überall vom Sinn und der Erfahrung aus, und strebt, deren Ergebnisse wissenschaftlich zu fassen und zu verbinden.

5. Sie beginnt mit einer Anleitung zum gründlichen und umfassenden Studium der Natur, sowohl nach ihren Grundgesetzen als nach der Entwicklung derselben in ihrer Geschichte, und zerfällt in folgende Hauptabtheilungen:
   a) die Astrognosie, oder Lehre von den Erscheinungen, Bewegungen und Gesetzen des Himmels;
   b) die Geognosie, oder Lehre von der Art und Fügung des Gesteins und der Natur der Elemente nach einer fortgehenden Erdgeschichte.
   c) die Phytologie, oder Lehre von der Natur, dem eigenthümlichen Leben und der Geschichte der Gewächse nach ihrem Eingriff in die Erdgeschichte;
   d) die Zoologie, oder Lehre von der Natur des thierischen Lebens nach den Entwicklungsstufen desselben vom Infusorium bis zum Menschen;
   e) die Anthropologie, oder Lehre vom Grundcharacter der menschlichen Natur nach deren Unterschieden vom thierischen Wesen und ihrer Anlage zum höhern Leben und dessen sittlicher Entwicklung.

6. Indem so die Anordnungen Gottes in der Natur beleuchtet und dem jugendlichen Geiste näher vertraut werden, dient diese Naturerkenntniß dem Studium der Ethik auf ähnliche Weise, wie ein gesunder und wohlgeordneter Leib dem reinen und guten Geiste.

Aus der Geschichte der Philosophie.

1. Die Geschichte der Philosophie ist Geschichte der Entwicklung des menschlichen Geistes und seines Verhältnisses zur Natur und zu Gott.

2. Sie lehrt den Geist in diesen seinen wesentlichen Momenten und Verhältnissen erkennen, und ist die historische Darstellung der Philosophie selbst.

3. Die morgenländische Philosophie hat den Character des Tiefsinns, die abendländische den des Scharfsinns; jene ist mehr mystischer, diese mehr dialectischer Natur.

4. In allen Systemen der indischen Philosophie ist die Ueberwältigung des menschlichen Geistes von der irrationalen Macht des Unendlichen der Grundcharacter.

5. Die Mysterien, vorzüglich die Eleusinien, sind als Fundgruben der griechischen Philosophie zu betrachten.

6. Die Platonischen Gespräche zeigen durch ihre bewunderungswürdig durchgeführte dialectische Kraft und Evidenz das negative Wesen der Philosophie für sich allein aufs Klareste; sie erregen das lebendigste Verlangen nach dem Positiven.

7. Platon und Aristoteles haben das ganze Gebiet des menschlichen Denkens und Wissens gewissermaßen erschöpft, und noch jetzt ist alle Philosophie unvermeidlich entweder platonisch oder aristotelisch, je nachdem sie ihrem Princip nach entweder aus höherer Eingeistung und Ueberlieferung, oder aus der Vernunft und Erfahrung entwickelt werden soll.

8. Die heidnische d. h. die sich selbst überlassene Philosophie ist die gehemmte Entwicklung der Naturkraft des Menschen bis zur klaresten und schärfsten Erkenntniß, bis zum reinen Naturgeist; die christliche d. h. vom Lichte des Evangeliums erleuchtete Philosophie will an dieser Schärfe und Klarheit nichts ändern; sie hält und bewahrt aber auch den reinsten und klaresten Geist in Demuth und im Grundgefühl menschlicher Gebrechlichkeit.

9. Alle bisherige deutsche Philosophie war bis auf Kant nur mehr oder weniger Aneignung des auswärtigen und Fremden, mit hie und da mächtig durchdringenden Blitzen eigenen Geistes z. B. in Leibniz. Von Kant an beginnt erst die eigenthümliche deutsche Philosophie sich zu regen. Aber Alles steht noch im Anfang und war bisher mehr kritisch und vernichtend, als aufbauend.

Aus der allgemeinen Encyclopädie.

1. Ueber die verschiedenen Arten menschlicher Erkenntniß — reine Erfahrung — Wissenschaft — Beziehung der Wissenschaft, als Einheit gebender Form auf den mannigfachen Stoff der Erscheinungswelt — Nothwendigkeit des analytischen Gangs zur Bildung der Wissenschaft.

2. Einheit aller Erkenntnißzweige durch Beziehung auf ein Princip. Gegensatz des Alterthums (der noch ungetheilten Gemeinschaft aller Erkenntnisse) und der Geistesentwicklung neuerer Zeit (des Auseinandertretens und der schärferen Sonderung) — Bedürfniß einer wissenschaftlichen Uebersicht.

3. Begriff der Encyclopädie. Aufzählung und Bestimmung der aus der Verschiedenheit des Stoffs und der Behandlungsweise hervorgehenden Arten derselben. Angabe dessen, was sie zu leisten hat. Darstellung ihres Werthes.

4. Methodologie — Perioden des Studierens. Betrachtung des Wesentlichen und Zweckmäßigen in der Gymnasialbildung und in den Universitätsstudien (Schleiermacher).

5. Philologische Wissenschaften. Geschichte der Sprachen und Schrift. Verschiedene Zweige der Graphik. Ueber pasigraphische Versuche insbesondere. Allgemeine Grammatik. Lexicographie. Verschiedene Arten, Zweck und Literatur der Wörterbücher.

6. Uebersicht und Characteristik einzelner Sprachen: a) der Sanscrit; b) der persischen; c) der semitischen; d) der griechischen; e) der lateinischen und ihrer Töchtersprachen; f) des germanischen Sprachstamms. (Nach Heeren, Chezy, Adelungs Mithridates, Vater, Fernow ꝛc.)

7. Geschichte im weiteren und engeren Sinne. Historische Critik und Angabe ihrer Untersuchungen. Betrachtung der Geschichtsquellen — Pragmatismus der Geschichte — Interesse des Geschichtstudiums. Elemente der Chronologie und Geographie. Diplomatik. Universalgeschichte. Spezialgeschichte mit ihren mannichfachen Unterabtheilungen.

8. Philosophische Wissenschaften — Ursprung und Ziel alles Philosophirens. Dogmatismus und Sceptizismus. Hauptsysteme des Dogma-

tismus. Criticismus. Propädeutische Disciplinen zur Philosophie. Metaphysik und ihre verschiedenen Theile. Ueber Pantheismus und Atheismus, deren verschiedene Erscheinungsweisen und Unzulänglichkeit. Unvergänglicher Werth und Einfluß wahrer Philosophie in alle Erkenntnißzweige.

Aus der Archäologie.

1. Ueber Denkmäler des Alterthums überhaupt und die der bildenden Kunst insbesondre. Verschiedene Betrachtungsweisen derselben. Antike. Vorzugliche Museen und Cabinete.

2. Ursprung der bildenden Kunst. Einfluß der Lebensweise. Beförderungsmittel und Hindernisse.

3. Denkmäler der indischen Baukunst. Ruinen von Persepolis. (Langles, Chardin.)

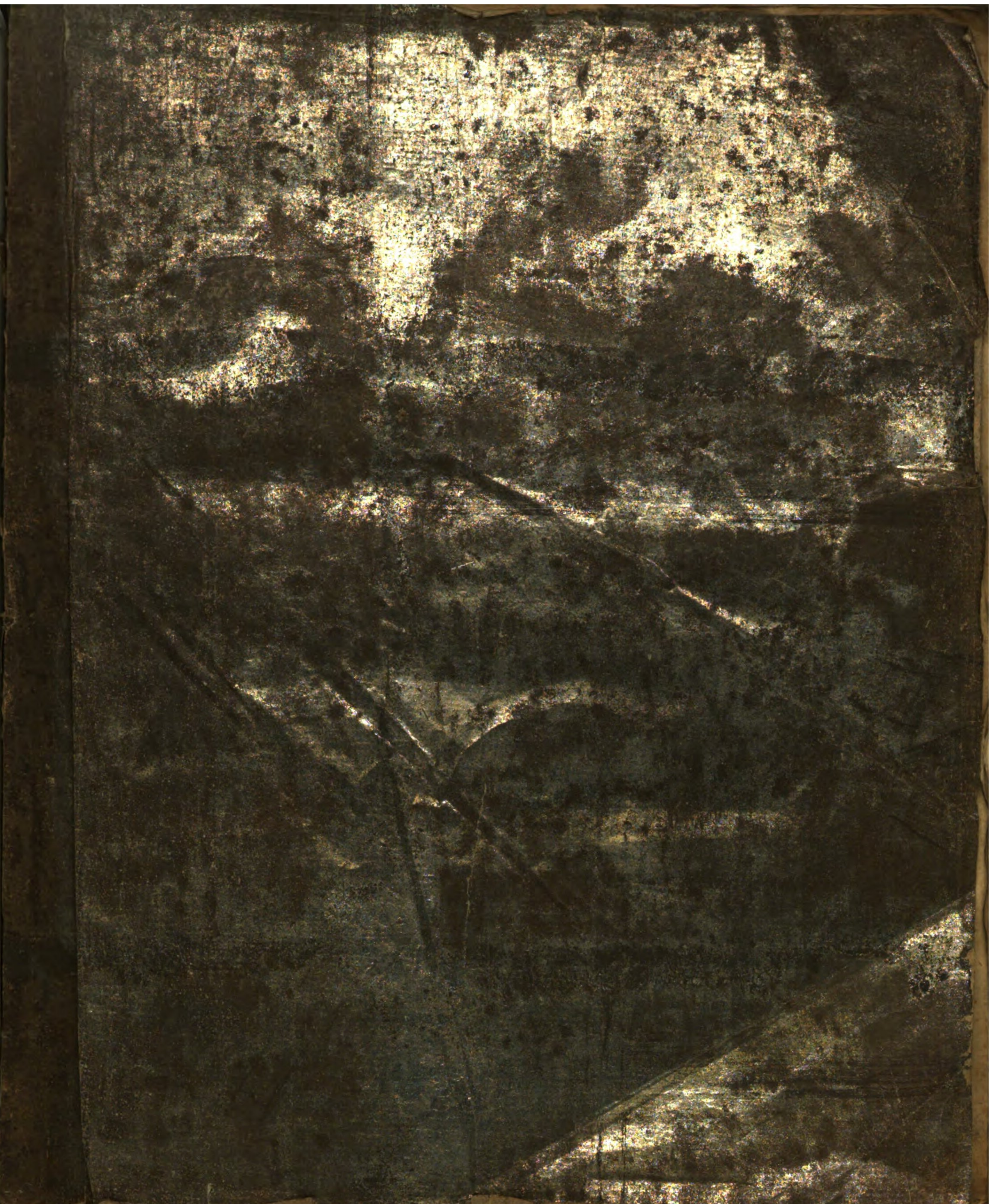
4. Aegypten. Kunstbildung und Perioden. Ueberreste der Baukunst. Obelisken und Pyramiden. Colosse. Mumien. (Montfaucon, Norden, Bekers Augusteum ꝛc.)

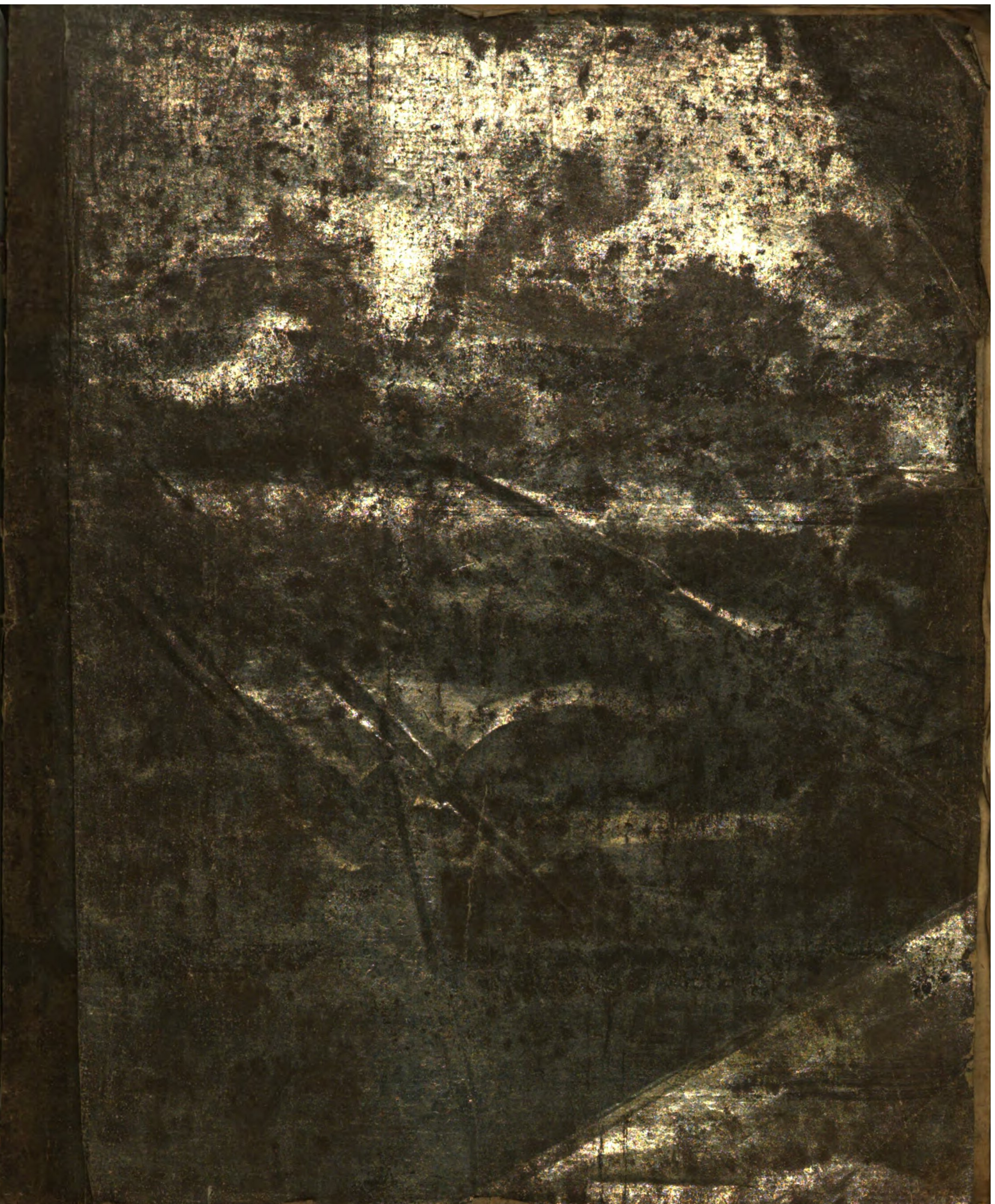
5. Etrusker. Geschichtliche Uebersicht. Character und dessen Einfluß auf die Kunst. Gebäude, Idole, Vasengemälde. Gori Museum. Hamilton.)

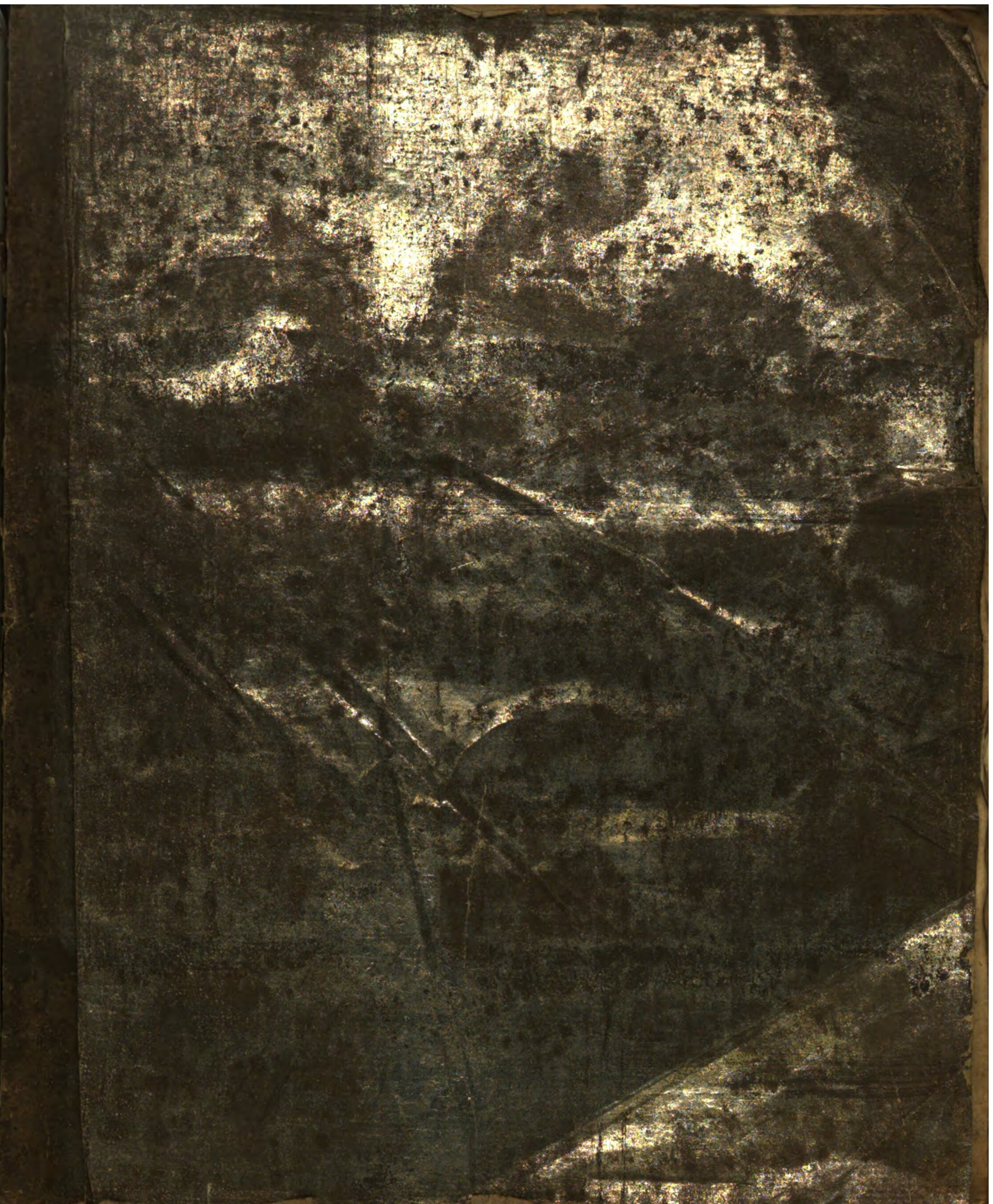
6. Epoche der griechischen Kunstgeschichte. Entwicklung des einer jeden eigenthümlichen Geschmacks und Angabe der vorzüglichsten Künstler und ihrer Werke — Kunst bey den Römern.

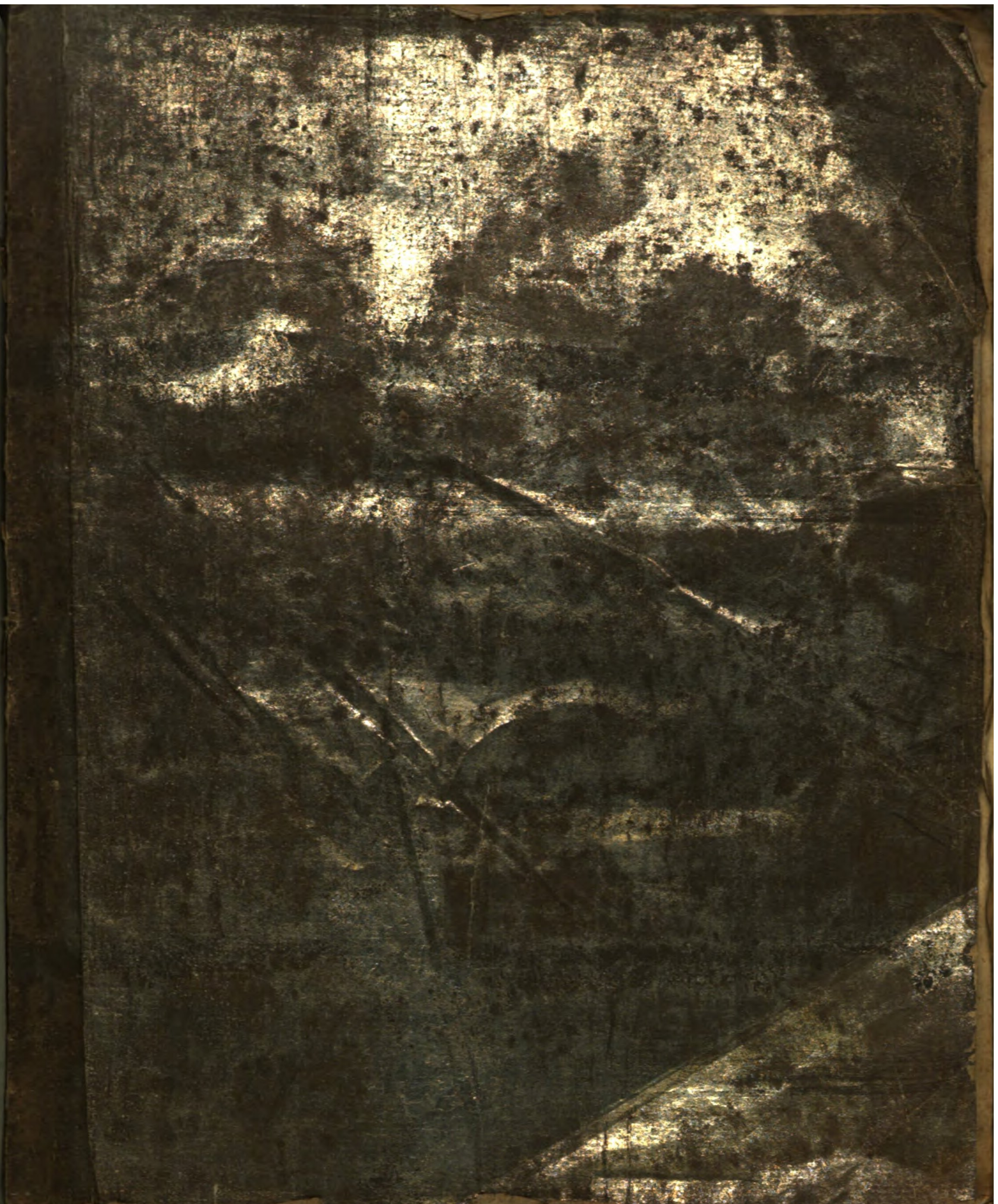
7. Betrachtung der vortrefflichsten Ueberreste der Baukunst, Bildhauerkunst und Steinschneidekunst. (Stuart, le Roy, Visconti, Millin. Pasten ꝛc.)

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS









BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hoffmann, Johann Josef Ignaz von,

Der 28. Satz des XI. Buchs der Elemente des Euclides Eine Einladungsschrift zur öff. Erörterung v. Sätzen aus den Lehrgegenständen der philos. Vorlesungen ... am k. Lyceum in Aschaffenburg

Aschaffenburg 1817

4 Math.p. 160 byy
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10053544-7